中国数学奥林匹克试题

BQ

2023 年 10 月 13 日

目录

第一章　全国中学生数学奥林匹克竞赛 (CMO)

1986 年中国数学奥林匹克

1. $a_1, a_2, \ldots, a_n$ 为实数, 如果它们中任意两数之和非负, 那么对于满足

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 1$$

的任意非负实数 $x_1, x_2, \ldots, x_n$, 有不等式

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n \geqslant a_1x_1^2 + a_2x_2^2 + \cdots + a_nx_n^2$$

成立. 请证明上述命题及其逆命题.

2. 在三角形 ABC 中, BC 边上的高 $AD = 12$, $\angle A$ 的平分线 $AE = 13$. 设 BC 边上的中线 $AF = m$, 问 m 在什么范围内取值时, $\angle A$ 分别为锐角、直角、钝角.

3. 设 $z_1, z_2, \ldots, z_n$ 为复数, 满足 $|z_1| + |z_2| + \cdots + |z_n| = 1$, 求证: 上述 n 个复数中, 必存在若干个复数, 它们的和的模不小于 $1/6$.

证明 1. 设集合

$$\begin{aligned}
A &= \left\{z : \arg z < \frac{\pi}{3} \text{ 或 } \arg z \geqslant \frac{5\pi}{3},\ z \in \{z_1, z_2, \ldots, z_n\}\right\},\\
B &= \left\{z : \frac{\pi}{3} \leqslant \arg z < \pi,\ z \in \{z_1, z_2, \ldots, z_n\}\right\},\\
C &= \left\{z : \pi \leqslant \arg z < \frac{5\pi}{3},\ z \in \{z_1, z_2, \ldots, z_n\}\right\}.
\end{aligned}$$

由对称性, 不妨设 A 中元素的模之和不小于 $1/3$.

设 $A = \{w_1, w_2, \ldots, w_m\}$, 其中 $w_k = x_k + \mathrm{i}y_k$, $x_k, y_k \in \mathbb{R}$, $k = 1, 2, \ldots, m$. 由

$$\arg w_k < \frac{\pi}{3} \text{ 或 } \arg w_k \geqslant \frac{5\pi}{3}$$

可得

$$|x_k + \mathrm{i}y_k|^2 = x_k^2 + y_k^2 \leqslant x_k^2 + 3x_k^2 = 4x_k^2,$$

从而 $|w_k| \leqslant 2x_k$. 于是

$$\left|\sum_{k=1}^{m} w_k\right| = \left|\sum_{k=1}^{m}(x_k + \mathrm{i}y_k)\right| = \left|\sum_{k=1}^{m} x_k + \mathrm{i}\sum_{k=1}^{m} y_k\right| \geqslant \sum_{k=1}^{m} x_k \geqslant \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m}|w_k| \geqslant \frac{1}{6}.$$

□

证明 2. 令 $z_k = x_k + \mathrm{i}y_k$, 其中 $x_k, y_k \in \mathbb{R}$, $k = 1, 2, \ldots, n$. 那么

$$1 = \sum_{k=1}^{n}|z_k| \leqslant \sum_{k=1}^{n}|x_k| + \sum_{k=1}^{n}|y_k| = \sum_{x_k \geqslant 0} x_k + \sum_{x_k < 0}(-x_k) + \sum_{y_k \geqslant 0} y_k + \sum_{y_k < 0}(-y_k).$$

由对称性, 不妨设 $\sum_{x_k \geqslant 0} x_k \geqslant 1/4$, 则

$$\left|\sum_{x_k \geqslant 0} z_k\right| \geqslant \left|\sum_{x_k \geqslant 0} x_k + \mathrm{i}\sum_{x_k \geqslant 0} y_k\right| \geqslant \sum_{x_k \geqslant 0} x_k \geqslant \frac{1}{4} > \frac{1}{6}.$$

□

注. 结论中的 $1/6$ 可加强为 $1/\pi$.

4. 已知四边形 $P_1P_2P_3P_4$ 的四个顶点位于三角形 ABC 的边上, 求证: 四个三角形 $P_1P_2P_3$, $P_1P_2P_4, P_1P_3P_4, P_2P_3P_4$ 中, 至少有一个的面积不大于三角形 ABC 面积的四分之一.

5. 能否把 $1, 1, 2, 2, 3, 4, \ldots, 1986, 1986$ 这些书重新排成一行, 使得两个 1 之间夹着一个数, 两个 2 之间夹着两个数, $\cdots$, 两个 1986 之间夹着一千九百八十六个数? 请证明你的结论.

6. 用任意的方式, 给平面上的每一个点染上黑色或白色. 求证: 一定存在一个边长为 1 或 $\sqrt{3}$ 的正三角形, 它的三个顶点是同色的.

1987 年中国数学奥林匹克

1. 设 n 为正整数. 求证: 方程 $z^{n+1}-z^n-1=0$ 有模为 1 的复根的充分必要条件是 $n+2$ 可被 6 整除.

2. 把边长为 1 的正三角形 ABC 的各边都 n 等分, 过各分点作平行于其他两边的直线, 将这三角形分成小三角形. 各小三角形的顶点都称为结点. 在每一个结点上放置了一个实数. 已知

(1) A,B,C 三点上放置的数分别为 a,b,c;

(2) 在每个由有公共边的两个最小三角形组成的菱形之中, 两组相对顶点上放置的数之和相等.

试求:

(1) 放置最大数的点与放置最小数的点之间的最短距离 r;

(2) 所有结点上的数的总和 S.

3. 某次体育比赛, 每两名选手都进行一场比赛, 每场比赛一定决出胜负. 通过比赛决定优秀选手. 选手 A 被确定为优秀选手的条件是: 对任何其他选手 B, 或者 A 胜 B; 或者存在选手 C, C 胜 B, A 胜 C.

如果按上述规则确定的优秀选手只有一名, 求证: 这名选手胜所有其他的选手.

4. 在一个面积为 1 的正三角形内部, 任意放五个点. 试证: 在此正三角形内, 一定可以作三个正三角形盖住这五个点, 这三个正三角形的各边分别平行于原三角形的边, 并且它们的面积之和不超过 0.64.

5. 设 $A_1A_2A_3A_4$ 是一个四面体, S_1,S_2,S_3,S_4 分别是以 A_1,A_2,A_3,A_4 为球心的球, 它们两两相切. 如果存在一点 O, 以这点为球心可作一个半径为 r 的球与 S_1,S_2,S_3,S_4 都相切, 还可作一个半径为 R 的球与四面体的各棱都相切. 求证: 这个四面体是正四面体.

6. m 个互不相同的正偶数与 n 个互不相同的正奇数的总和为 1987, 对于所有这样的 m 与 n, 问 $3m+4n$ 的最大值是多少? 请证明你的结论.

1988 年中国数学奥林匹克

1. 设 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ 是给定的不全为 0 的实数, $r_1, r_2, \ldots, r_n$ 是实数, 如果不等式

$$r_1(x_1 - a_1) + r_2(x_2 - a_2) + \cdots + r_n(x_n - a_n) \leqslant \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2} - \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}$$

对任何实数 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ 成立, 求 $r_1, r_2, \ldots, r_n$ 的值.

2. 设 C_1, C_2 是同心圆, C_2 的半径是 C_1 半径的 2 倍. 四边形 $A_1A_2A_3A_4$ 内接于 C_1, 将 A_4A_1 延长交圆 C_2 于 B_1, A_1A_2 延长交圆 C_2 于 B_2, A_2A_3 延长交圆 C_2 于 B_3, A_3A_4 延长交圆 C_2 于 B_4. 试证: 四边形 $B_1B_2B_3B_4$ 的周长大于等于四边形 $A_1A_2A_3A_4$ 的周长的两倍. 并请确定等号成立的条件.

3. 在有限项的实数列 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ 中, 如果有一段数 $a_k, \ldots, a_{k+\ell-1}$ 的算术平均数大于 1988, 那么我们把这段数叫作一条 “龙”, 并把 a_k 称为这条龙的 “龙头” (如果某一项 $a_m \geqslant$ 1988, 那么单独这一项也是龙).

假定数列中至少存在一条龙, 证明: 数列中全体可以作为龙头的项的算术平均数也必定大于 1988.

4. (1) 设三个正实数 a, b, c 满足 $(a^2+b^2+c^2)^2 > 2(a^4+b^4+c^4)$. 求证: a, b, c 一定是某个三角形的三条边长.

(2) 设 n 个正实数 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ 满足不等式

$$(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2)^2 > (n-1)(a_1^4 + a_2^4 + \cdots + a_n^4). \quad n \geqslant 3$$

求证: 这些数中任何三个一定是某个三角形的三条边长.

5. 给定三个四面体 $A_iB_iC_iD_i$ $(i = 1, 2, 3)$, 过点 B_i, C_i, D_i 作平面 $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ $(i = 1, 2, 3)$, 分别与棱 A_iB_i, A_iC_i, A_iD_i 垂直 $(i = 1, 2, 3)$. 如果九个平面 $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ $(i = 1, 2, 3)$ 相交于一点 E, 而三点 A_1, A_2, A_3 在同一直线 ℓ 上, 求三个四面体的外接球面的交集. (形状怎样? 位置如何?)

6. 设 n 是不小于 3 的正整数, 用 $f(n)$ 表示不是 n 的因数的最小正整数 (例如 $f(12) = 5$). 如果 $f(n) \geqslant 3$, 又可作 $f(f(n))$. 类似的, 如果 $f(f(n)) \geqslant 3$, 又可作 $f(f(f(n)))$ 等. 如果

$$\underbrace{f(f(\cdots f}_{k\text{ 个 }f}(n)\cdots)) = 2,$$

就把 k 叫作 n 的 “长度”.

如果用 ℓ_n 表示 n 的长度, 试对任意的正整数 n $(n \geqslant 3)$ 求 ℓ_n, 并证明你的结论.

1989 年中国数学奥林匹克

1. 在半径为 1 的圆周上, 任意给定两个点集 A, B, 它们都由有限段互不相交的弧组成, 其中 B 的每段弧的长度都等于 $\dfrac{\pi}{m}$, m 是个正整数, 用 A^j 表示将集合 A 沿逆时针方向在圆周上转动 $\dfrac{j\pi}{m}$ $(j=1,2,3,\dots)$ 弧度所得的集合. 求证: 存在正整数 k, 使得

$$\ell(A^k \cap B) \geqslant \frac{1}{2\pi}\ell(A)\ell(B),$$

这里 $\ell(X)$ 表示组成点集 X 的互不相交的弧段的长度之和.

2. 设 $x_1, x_2, \dots, x_n$ $(n \geqslant 2)$ 都是正数且 $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i = 1$, 求证:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{\sqrt{1-x_i}} \geqslant \frac{\sum\limits_{i=1}^{n}\sqrt{x_i}}{\sqrt{n-1}}.$$

证明 1. 由 Cauchy 不等式,

$$\sum_{k=1}^{n}\sqrt{1-x_k} \leqslant \sqrt{n\sum_{k=1}^{n}(1-x_k)} = \sqrt{n(n-1)},$$

于是

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n}\frac{x_k}{\sqrt{1-x_k}} &= \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{1-x_k}} - \sum_{k=1}^{n}\sqrt{1-x_k} \\
&\geqslant \frac{n^2}{\sum\limits_{k=1}^{n}\sqrt{1-x_k}} - \sum_{k=1}^{n}\sqrt{1-x_k} \\
&\geqslant \frac{n^2}{\sqrt{n(n-1)}} - \sqrt{n(n-1)} = \sqrt{\frac{n}{n-1}},
\end{aligned}$$

而

$$\sum_{k=1}^{n}\sqrt{x_k} \leqslant \sqrt{n\sum_{k=1}^{n}x_k} = \sqrt{n},$$

所以

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{x_k}{\sqrt{1-x_k}} \geqslant \sqrt{\frac{n}{n-1}} \geqslant \frac{1}{\sqrt{n-1}}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{x_k}.$$

□

证明 2. 令

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x}},$$

则
$$f''(x)=\frac{3}{4}x(1-x)^{-5/2}+(1-x)^{-3/2}>0,$$
于是当 $0<x<1$ 时, $f(x)$ 是凸函数, 由 Jensen 不等式,
$$\sum_{k=1}^{n}\frac{x_k}{\sqrt{1-x_k}}=\sum_{k=1}^{n}f(x_k)\geqslant nf\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}x_k\right)=n\left(\frac{1}{n}\right)=\sqrt{\frac{n}{n-1}}.$$
而
$$\sum_{k=1}^{n}\sqrt{x_k}\leqslant\sqrt{n\sum_{k=1}^{n}x_k}=\sqrt{n},$$
所以
$$\sum_{k=1}^{n}\frac{x_k}{\sqrt{1-x_k}}\geqslant\sqrt{\frac{n}{n-1}}\geqslant\frac{1}{\sqrt{n-1}}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{x_k}.$$
□

3. 设 S 是复平面上的单位圆周 (即模等于 1 的复数的集合), f 是从 S 到 S 的映射, 对于任何 $x\in S$, 定义
$$f^{(1)}(x)=f(x),\quad f^{(2)}(x)=f(f(x)),\quad\cdots,\quad f^{(k)}(x)=\underbrace{f(f(\cdots f}_{k\text{ 个 }f}(x)\cdots)),\quad\cdots.$$
如果 $c\in S$ 及正整数 n 使得
$$f^{(1)}(c)\neq c,\quad f^{(2)}(c)\neq c,\quad\cdots,\quad f^{(n-1)}(c)\neq c,\quad f^{(n)}(c)=c,$$
我们就说 c 是 f 的 n-周期点.

设 m 是大于 1 的正整数, f 的定义如下:
$$f(z)=z^m,\quad z\in S$$
试计算 f 的 1989-周期点的总数.

4. 设点 D,E,F 分别在 $\triangle ABC$ 的三边 BC,CA,AB 上, 且 $\triangle AEF,\triangle BFD,\triangle CDE$ 的内切圆有相等的半径 r. 又以 r_0 和 R 分别表示 $\triangle DEF$ 和 $\triangle ABC$ 的内切圆半径, 求证: $r+r_0=R$.

5. 空间中有 1989 个点, 其中任何三点不共线, 把它们分成点数各不相同的 30 组, 在任何三个不同的组中各取一点为顶点作三角形. 问: 要使这种三角形的总数最大, 各组的点数应为多少?

6. f 是定义在 $(1,+\infty)$ 上且在 $(1,+\infty)$ 中取值的函数, 满足条件: 对任何 $x,y>1$ 及 $u,v>0$, 都成立
$$f(x^uy^v)\leqslant f(x)^{\frac{1}{4u}}f(y)^{\frac{1}{4v}}.$$
试确定所有这样的函数 f.

1990 年中国数学奥林匹克

1. 如图 1.1, 在凸四边形 $ABCD$ 中, AB 与 CD 不平行, 圆 O_1 过 A, B 且与边 CD 相切于 P, 圆 O_2 过 C, D 且与边 AB 相切于 Q, 圆 O_1 与圆 O_2 相交于 E, F. 求证: EF 平分线段 PQ 的充分必要条件是 $BC \mathbin{/\mkern-6mu/} AD$.

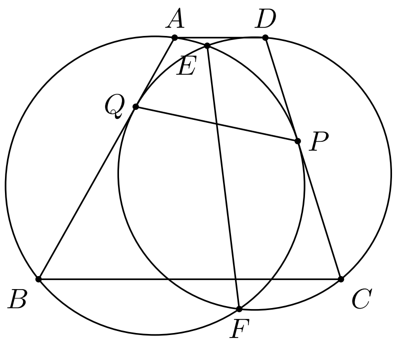

图 1.1

2. 设 x 是一个正整数. 若一列正整数 $x_0 = 1, x_1, x_2, \ldots, x_{\ell-1}, x_\ell = x$ 满足 $x_{i-1} < x_i$, $x_{i-1} \mid x_i$, $i = 1, 2, \ldots, \ell$, 则称 $\{x_0, x_1, \ldots, x_\ell\}$ 为 x 的一条因子链, ℓ 为该因子链的长度. 用 $L(x)$ 和 $R(x)$ 分别表示 x 的最长因子链的长度和最长因子链的条数.

对于 $x = 5^k \times 31^m \times 1990^n$ (k, m, n 是正整数), 试求 $L(x)$ 与 $R(x)$.

3. 设函数 $f(x)$ 对 $x \geqslant 0$ 有定义, 且满足条件:

(1) 对任意 $x, y \geqslant 0$, $f(x)f(y) \leqslant y^2 f(x/2) + x^2 f(y/2)$;

(2) 存在常数 $M > 0$, 当 $0 \leqslant x \leqslant 1$ 时, $|f(x)| \leqslant M$.

求证: $f(x) \leqslant x^2$.

4. 设 a 是给定的正整数, A 和 B 是两个实数, 试确定方程组

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = (13a)^2 \\ x^2(Ax^2 + By^2) + y^2(Ay^2 + Bz^2) + z^2(Az^2 + Bx^2) = \dfrac{1}{4}(2A + B)(13a)^4 \end{cases}$$

有正整数解的充分必要条件 (用 A, B 的关系式表示, 并予以证明).

5. 设 X 是一个有限集合, 映射 f 使得 X 的每一个偶子集 E (偶数个元素组成的子集) 都对应一个实数 $f(E)$, 且满足条件:

(1) 存在一个偶子集 D, 使得 $f(D) > 1990$;

(2) 对于 X 的任意两个不相交的偶子集 A, B, 有 $f(A \cup B) = f(A) + f(B) - 1990$.

求证: 存在 X 的子集 P 和 Q, 满足

(1) $P \cap Q = \varnothing$, $P \cup Q = X$;
(2) 对 P 的任何非空偶子集 S, 有 $f(S) > 1990$;
(3) 对 Q 的任何偶子集 T, 有 $f(T) \leqslant 1990$.

6. 凸 n 边形及 $n-3$ 条边在形内不相交的对角线组成的图形称为一个剖分图. 求证: 当且仅当 $3 \mid n$ 时, 存在一个剖分图是可以一笔画的 (即可以从一个顶点出发, 经过各线段恰一次, 最后回到出发点).

1991 年中国数学奥林匹克

1. 平面上有一个凸四边形 $ABCD$.

(1) 如果平面上存在一点 P, 使得 $\triangle ABP, \triangle BCP, \triangle CDP, \triangle DAP$ 的面积都相等, 问四边形 $ABCD$ 要满足什么条件?

(2) 满足 (1) 的点 P, 平面上最多有几个? 证明你的结论.

2. 设 $I = [0,1]$, $G = \{(x,y) : x \in I, y \in I\}$, 求 G 到 I 的所有映射 f, 使得对任何 $x, y, z \in I$, 有

(1) $f(f(x,y),z) = f(x, f(y,z))$;

(2) $f(x,1) = x$, $f(1,y) = y$;

(3) $f(zx, zy) = z^k f(x,y)$.

这里 k 是与 x, y, z 都无关的正数.

3. 地面上有 10 只小鸟在啄食, 其中任意 5 只鸟中至少有 4 只在一个圆周上, 问有鸟最多的一个圆周上最少有几只鸟?

4. 求满足下述方程

$$x^{2n+1} - y^{2n+1} = xyz + 2^{2z+1}$$

的所有正整数组 (x, y, z, n), 这里 $n \geqslant 2$ 且 $y \leqslant 5 \cdot 2^{2n}$.

5. 求所有正整数 n, 使得

$$\min_{k \in \mathbb{N}^*} \left(k^2 + \left\lfloor \frac{n}{k^2} \right\rfloor \right) = 1991,$$

这里 $\left\lfloor \frac{n}{k^2} \right\rfloor$ 表示不超过 $\frac{n}{k^2}$ 的最大整数, $\mathbb{N}^*$ 是正整数集.

6. MO 牌足球由若干多边形皮块用三种不同颜色的丝线缝制而成, 有以下特点:

(1) 任一多边形皮块的一条边恰与另一多边形皮块同样长的一条边用一种颜色的丝线缝合;

(2) 足球上每一个结点恰好是三个多边形的顶点, 每一个结点的三条缝线的颜色不同.

求证: 可以在 MO 牌足球的每一个结点上放置一个不等于 1 的复数, 使得每一个多边形皮块的所有顶点上放置的复数的乘积都等于 1.

1992 年中国数学奥林匹克

1. 设方程 $x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0 = 0$ 的系数都是实数, 且满足条件

$$0 < a_0 \leqslant a_1 \leqslant \cdots \leqslant a_{n-1} \leqslant 1.$$

已知 λ 为此方程的复数根, 且 $|\lambda| \geqslant 1$. 试证: $\lambda^{n+1} = 1$.

2. 设 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ 为非负实数. 记 $x_{n+1} = x_1$, $a = \min\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$. 试证:

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{1+x_j}{1+x_{j+1}} \leqslant n + \frac{1}{(1+a)^2} \sum_{j=1}^{n} (x_j - a)^2,$$

且证等式成立当且仅当 $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$.

3. 在平面上画出一个 9×9 的方格表, 在这些小方格的每一格中都任意填入 $+1$ 或 -1. 下面一种改变填入数的方式称为作一次操作: 对任意一个小方格, 凡与此小方格有一条公共边的所有小方格 (不包含此格本身) 中的数作连乘积, 于是每取一格, 就算出一个数. 在所有小格都取遍后, 再将这些算出的数放入相应的小方格中. 试问是否总可以经过有限次操作, 使得所有小方格中的数都变为 1?

4. 凸四边形 $ABCD$ 内接于圆 O, 对角线 AC 与 BD 相交于 P. $\triangle ABP, \triangle CDP$ 的外接圆相交于 P 和另一点 Q, 且 O, P, Q 三点两两不重合. 试证: $\angle OQP = 90°$.

证明. 如图 1.2. 由题意,

$$\angle AQD = \angle AQP + \angle DQP = \angle ABP + \angle DCP = 2\angle ABD = \angle AOD,$$

于是 A, O, Q, D 四点共圆. 所以

$$\angle OQP = \angle AQO + \angle AQP = \angle ADO + \frac{1}{2}\angle AOD = \frac{\pi}{2}.$$

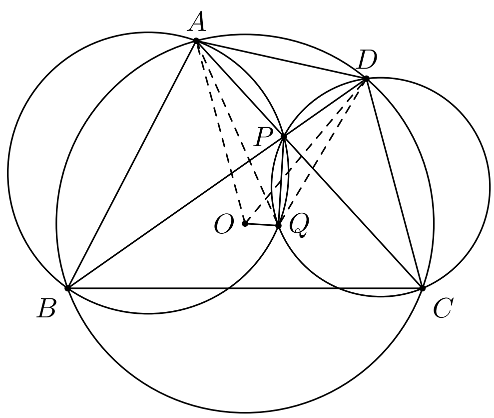

图 1.2

□

5. 在有八个顶点的简单图中, 没有四边形的图的边数的最大值是多少? (简单图是指任一点与自己没有边相连, 而且任何两个点之间如果有边相连, 就只有一条边相连的图.)

6. 已知整数列 $\{a_0, a_1, a_2, \dots\}$ 满足

(1) $a_{n+1} = 3a_n - 3a_{n-1} + a_{n-2}$, $n = 2, 3, \dots$;

(2) $2a_1 = a_0 + a_2 - 2$;

(3) 对任意正整数 m, 在数列 $\{a_0, a_1, a_2, \dots\}$ 中必有连续的 m 项 $a_k, a_{k+1}, \dots, a_{k+m-1}$ 都是完全平方数.

求证: $\{a_0, a_1, a_2, \dots\}$ 的所有项都是完全平方数.

1993 年中国数学奥林匹克

1. 设 n 是大于 1 的奇数, 试证明: 存在 $2n$ 个整数 $a_1, a_2, \ldots, a_n; b_1, b_2, \ldots, b_n$, 使得对任意一个整数 k, $0 < k < n$, 下列 $3n$ 个数

$$a_i + a_{i+1}, \quad a_i + b_i, \quad b_i + b_{i+k}$$

(其中 $i = 1, 2, \ldots, n$, $a_{n+1} = a_1$, $b_{n+j} = b_j$, $0 < j < n$) 被 $3n$ 除时所得的余数互不相同.

2. 给定 $k \in \mathbb{N}^*$ 及实数 $a > 0$, 在下列条件

$$k_1 + k_2 + \cdots + k_r = k, \quad k_i \in \mathbb{N}^*, \quad 1 \leqslant r \leqslant k$$

下, 求 $a^{k_1} + a^{k_2} + \cdots + a^{k_r}$ 的最大值.

3. 设圆 K 与 K_1 同心, 它们的半径分别为 R 和 R_1, $R_1 > R$. 四边形 $ABCD$ 内接于圆 K, 四边形 $A_1B_1C_1D_1$ 内接于圆 K_1, 点 A_1, B_1, C_1, D_1 分别在射线 CD, DA, AB, BC 上. 求证:

$$\frac{S_{A_1B_1C_1D_1}}{S_{ABCD}} \geqslant \frac{R_1^2}{R^2}.$$

4. 给定集合 $S = \{z_1, z_2, \ldots, z_{1993}\}$, 其中 $z_1, z_2, \ldots, z_{1993}$ 是非零复数. 求证: 可以把 S 中的元素分成若干组, 使得

(1) S 中的每个元素属于且仅属于其中的一组;

(2) 每一组中任一复数与该组所有复数之和的夹角不超过 $90°$;

(3) 将任意两组中复数分别求和, 所得和数之间的夹角大于 $90°$.

5. 10 人到书店买书, 已知

(1) 每人都买了三种书;

(2) 任何两人所买的书, 都至少有一种相同.

问购买人数最多的一种书最少有几人购买? 说明理由.

6. 设函数 $f : (0, +\infty) \to (0, +\infty)$ 满足对任意的 $x > 0$, $y > 0$, 都有 $f(xy) \leqslant f(x)f(y)$.

试证: 对任意的 $x > 0$, $n \in \mathbb{N}^*$, 有

$$f(x^n) \leqslant f(x)f(x^2)^{1/2} \cdots f(x^n)^{1/n}.$$

1994 年中国数学奥林匹克

1. 设 $ABCD$ 是一个梯形 $(AB \parallel CD)$, E 是线段 AB 上一点, F 是线段 CD 上一点, 线段 CE 与 BF 相交与点 H, 线段 ED 与 AF 相交与点 G.

求证: $S_{EHFG} \leqslant \dfrac{1}{4}S_{ABCD}$.

如果 $ABCD$ 是一个任意凸四边形, 同样结论是否成立? 请说明理由.

2. n $(n \geqslant 4)$ 个盘子里放有总数不少于 4 的糖块, 从任选的两个盘子中各取一块糖, 放入另一个盘子中, 称为一次操作. 问能否经过有限次操作, 把所有糖块集中到一个盘子里? 证明你的结论.

3. 求满足以下条件的所有函数 $f : [1, +\infty) \to [1, +\infty)$:

(1) $f(x) \leqslant 2(x + 1)$;

(2) $f(x + 1) = \dfrac{1}{x}(f^2(x) - 1)$.

4. 已知 $f(x) = C_0z^n + C_1z^{n-1} + C_2z^{n-2} + \cdots + C_{n-1}z + C_n$ 是一个 n 次复系数多项式. 求证: 一定存在一个复数 z_0, $|z_0| \leqslant 1$, 并且满足 $|f(z_0)| \geqslant |C_0| + |C_n|$.

5. 对任何正整数 n, 求证:

$$\sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k 2^k \mathrm{C}_{n-k}^{\left\lfloor \frac{n-k}{2} \right\rfloor} = \mathrm{C}_{2n+1}^{n},$$

其中 $\mathrm{C}_0^0 = 1$, $\left\lfloor \dfrac{n-k}{2} \right\rfloor$ 表示 $\dfrac{n-k}{2}$ 的整数部分.

证明. 记 $[x^n]f(x)$ 为 $f(x)$ 的展开式中 x^n 项的系数, 那么

$$\binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} = [x^n](1 + x)(1 + x^2)^n,$$

于是

$$\begin{aligned}
\binom{2n+1}{n} &= [x^n](1 + x)^{2n} = [x^n](1 + x)((1 + x^2) + 2x)^n \\
&= [x^n](1 + x)\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(1 + x^2)^k(2x)^{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}2^{n-k}[x^k](1 + x)(1 + x^2)^k \\
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}2^{n-k}\binom{k}{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor} \\
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}2^{k}\binom{n-k}{\lfloor \frac{n-k}{2} \rfloor}.
\end{aligned}$$

□

6. 设 M 为平面上坐标为 $(p \times 1994, 7p \times 1994)$ 的点, 其中 p 是素数. 求满足下述条件的直角三角形的个数:

(1) 三角形的三个顶点都是整点, 而且 M 是直角顶点;

(2) 三角形的内心是坐标原点.

1995 年中国数学奥林匹克

1. 设 $2n$ 个实数 $a_1, a_2, \ldots, a_n; b_1, b_2, \ldots, b_n$ $(n \geqslant 3)$ 满足条件:

(1) $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = b_1 + b_2 + \cdots + b_n$;

(2) $0 < a_1 = a_2$, $a_i + a_{i+1} = a_{i+2}$ $(i = 1, 2, \ldots, n-2)$;

(3) $0 < b_1 \leqslant b_2$, $b_i + b_{i+1} = b_{i+2}$ $(i = 1, 2, \ldots, n-2)$.

求证: $a_{n-1} + a_n \leqslant b_{n-1} + b_n$.

2. 设 $\mathbb{N}^*$ 表示正整数集合, $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ 满足条件: $f(1) = 1$, 且对任何正整数 n 都有

$$\begin{cases} 3f(n)f(2n+1) = f(2n)(1 + 3f(n)), \\ f(2n) < 6f(n). \end{cases}$$

试求方程

$$f(k) + f(\ell) = 293, \quad k < \ell$$

的所有解.

3. 试求

$$\sum_{i=1}^{10}\sum_{j=1}^{10}\sum_{k=1}^{10}\left|k(x+y-10i)(3x-6y-36j)(19x+95y-95k)\right|$$

的最小值, 其中 x 和 y 是任意实数.

4. 空间中有四个球, 它们的半径分别为 $2, 2, 3, 3$, 每个球都与其余三个球外切, 另有一个小球与那四个球都外切, 球该小球的半径.

5. 设 $a_1, a_2, \ldots, a_{10}$ 是 10 个两两不同的正整数, 它们的和为 1995, 试求

$$a_1a_2 + a_2a_3 + \cdots + a_9a_{10} + a_{10}a_1$$

的最小值.

6. 设 n 是大于 1 的奇数, 给定

$$x_0 = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}) = (1, 0, \ldots, 0, 1).$$

设

$$x_1^{(k)} = \begin{cases} 0, & x_i^{(k-1)} = x_{i+1}^{(k-1)} \\ 1, & x_i^{(k-1)} \neq x_{i+1}^{(k-1)} \end{cases}, \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

其中 $x_{n+1}^{(k-1)} = x_1^{(k-1)}$. 记

$$x_k = (x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \ldots, x_n^{(k)}), \quad k = 1, 2, \ldots.$$

若正整数 m 满足 $x_m = x_0$, 求证: m 是 n 的倍数.

1996 年中国数学奥林匹克

1. 设 H 是锐角 $\triangle ABC$ 的垂心, 由 A 向以 BC 为直径的圆作切线 AP, AQ, 切点分别为 P, Q. 求证: P, H, Q 三点共线.

证明. 如图 1.3. 设 AD, CF 分别是 $\triangle ABC$ 中 BC, AB 边上的高. 设点 O 为 BC 的中点, AO 交 PQ 于点 G.

由圆幂定理得 $AP^2 = AF \cdot AB$, 由射影定理得 $AP^2 = AG \cdot AO$, 那么 $AB \cdot AF = AG \cdot AO$.

由 $\angle BDH = \pi/2 = \angle BFH$ 得 B, D, H, F 四点共圆, 那么 $AB \cdot AF = AH \cdot AD$. 于是 $AG \cdot AO = AH \cdot AD$, 可得 O, D, H, G 四点共圆, 从而 $OG \perp GH$.

又因为 $AO \perp PQ$, 所以 P, H, Q 三点共线.

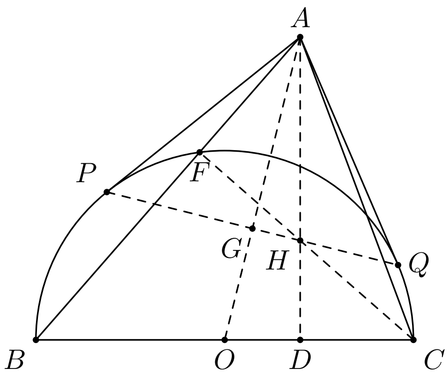

图 1.3

□

注. 设 BE, CF 是 $\triangle ABC$ 的边 AC, AB 上的高, 且点 E, F 在以 BC 为直径的圆 Γ 上, 根据配极理论, 点 H 在点 A 关于圆 Γ 的极线上. 注意到 PQ 就是点 A 关于圆 Γ 的极线, 所以 P, H, Q 三点共线.

2. 设 $S = \{1, 2, \dots, 50\}$, 求最小的正整数 k, 使 S 的任一 k 元子集中都存在两个不同的数 a 和 b, 满足 $(a+b) \mid ab$.

3. 设函数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 满足条件

$$f\big(x^3 + y^3\big) = (x+y)\big(f^2(x) - f(x)f(y) + f^2(y)\big), \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

试证: 对任意 $x \in \mathbb{R}$, 都有

$$f(1996x) = 1996 f(x).$$

证明. 令 $x = y = 0$ 可得 $f(0) = 0$. 令 $y = 0$ 可得 $f(x^3) = x f^2(x)$, 于是

$$x \geqslant 0 \implies f(x) \geqslant 0, \qquad x \leqslant 0 \implies f(x) \leqslant 0.$$

令

$$S=\{\alpha>0:\forall x\in\mathbb{R},\ f(\alpha x)=\alpha f(x)\}.$$

若 $\alpha\in S$, 则

$$\alpha x f^2(x)=\alpha f(x^3)=f(\alpha x^3)=f\Big(\big(\sqrt[3]{\alpha}x\big)^3\Big)=\sqrt[3]{\alpha}xf^2\big(\sqrt[3]{\alpha}x\big),$$

于是当 $x>0$ 时,

$$\big(\sqrt[3]{\alpha}f(x)\big)^2=f^2\big(\sqrt[3]{\alpha}x\big),\qquad \sqrt[3]{\alpha}f(x)=f\big(\sqrt[3]{\alpha}x\big),$$

所以 $\sqrt[3]{\alpha}\in S$.

若 $\alpha,\beta\in S$, 则

$$\begin{aligned}f((\alpha+\beta)x)&=f\Big(\big(\sqrt[3]{\alpha x}\big)^3+\big(\sqrt[3]{\beta x}\big)^3\Big)\\&=\big(\sqrt[3]{\alpha x}+\sqrt[3]{\beta x}\big)\Big(f^2\big(\sqrt[3]{\alpha x}\big)-f\big(\sqrt[3]{\alpha x}\big)f\big(\sqrt[3]{\beta x}\big)+f^2\big(\sqrt[3]{\beta x}\big)\Big)\\&=\big(\sqrt[3]{\alpha}+\sqrt[3]{\beta}\big)\sqrt[3]{x}\Big(\big(\sqrt[3]{\alpha}\big)^2-\big(\sqrt[3]{\alpha}\big)\big(\sqrt[3]{\beta}\big)+\big(\sqrt[3]{\beta}\big)^2\Big)f^2\big(\sqrt[3]{x}\big)\\&=(\alpha+\beta)f(x),\end{aligned}$$

于是 $\alpha+\beta\in S$.

由于 $1\in S$, 那么 $n\in S\implies n+1\in S$, 由数学归纳法可知对任何正整数 n 都有 $n\in S$, 所以 $1996\in S$. □

4. 8 位歌手参加艺术节, 准备为他们安排 m 次演出, 每次由其中 4 位登台表演, 要求 8 位歌手中任意两位同事演出的次数都一样多. 请设计一种方案, 使得演出的次数 m 最少.

5. 设 $n\in\mathbb{N}^*$, $x_0=0$, $x_i>0$, $i=1,2,\ldots,n$, 且 $\sum\limits_{i=1}^{n}x_i=1$. 求证:

$$1\leqslant\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{\sqrt{1+x_0+x_1+\cdots+x_{i-1}}\sqrt{x_i+x_{i+1}+\cdots+x_n}}<\frac{\pi}{2}.$$

证明. 对 $k=0,1,2,\ldots,n$, 令 $y_k=x_0+x_1+\cdots+x_k$, 令 $\theta_k=\arcsin y_k$, 于是

$$0=\theta_0<\theta_1<\cdots<\theta_n=1,$$

并且有

$$\begin{aligned}&\sum_{k=1}^{n}\frac{x_k}{\sqrt{1+x_0+x_1+\cdots+x_{k-1}}\sqrt{x_k+x_{k+1}+\cdots+x_n}}\\=&\sum_{k=1}^{n}\frac{y_k-y_{k-1}}{\sqrt{1+y_{k-1}}\sqrt{1-y_{k-1}}}=\sum_{k=1}^{n}\frac{y_k-y_{k-1}}{\sqrt{1-y_{k-1}^2}}=\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin\theta_k-\sin\theta_{k-1}}{\cos\theta_k}.\end{aligned}$$

一方面,

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin\theta_k-\sin\theta_{k-1}}{\cos\theta_k}\geqslant\sum_{k=1}^{n}(\sin\theta_k-\sin\theta_{k-1})=\sin\theta_n-\sin\theta_0=1.$$

另一方面,

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin\theta_k-\sin\theta_{k-1}}{\cos\theta_k}&=\sum_{k=1}^{n}\frac{2\cos\frac{\theta_k+\theta_{k-1}}{2}\sin\frac{\theta_k-\theta_{k-1}}{2}}{\cos\theta_{k-1}}\\&=\sum_{k=1}^{n}2\sin\frac{\theta_k-\theta_{k-1}}{2}\cdot\frac{\cos\frac{\theta_k+\theta_{k-1}}{2}}{\cos\theta_{k-1}}\\&<\sum_{k=1}^{n}(\theta_k-\theta_{k-1})=\theta_n-\theta_0=\frac{\pi}{2}.\end{aligned}$$

命题得证. □

6. 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle C=90^\circ$, $\angle A=30^\circ$, $BC=1$. 求 $\triangle ABC$ 的内接三角形 (三顶点分别在三边上的三角形) 的最长边的最小值.

1997 年中国数学奥林匹克

1. 设实数 $x_1, x_2, \ldots, x_{1997}$ 满足如下两个条件:

(1) $-\frac{1}{\sqrt{3}} \leqslant x_i \leqslant \sqrt{3}\ (i=1,2,\ldots,1997)$;

(2) $x_1+x_2+\cdots+x_{1997}=-318\sqrt{3}$.

试求: $x_1^{12}+x_2^{12}+\cdots+x_{1997}^{12}$ 的最大值, 并说明理由.

2. 设 $A_1B_1C_1D_1$ 是任意凸四边形, P 是形内一点, 且 P 到各顶点的连线与四边形过该顶点的两条边的夹角均为锐角. 递推定义 A_k, B_k, C_k 和 D_k 分别为 P 关于直线 $A_{k-1}B_{k-1}$, $B_{k-1}C_{k-1}, C_{k-1}D_{k-1}$ 和 $D_{k-1}A_{k-1}$ 的对称点 $(k=2,3,\ldots)$.

考察四边形序列 $A_jB_jC_jD_j\ (j=1,2,\ldots)$. 试问:

(1) 前 12 个四边形中, 哪些必定与第 1997 个相似, 哪些未必?

(2) 假设第 1997 个是圆内接四边形, 那么在前 12 个四边形中, 哪些必定是圆内接四边形, 哪些未必?

对以上问题的回答, 肯定的应给证明, 未必的应举例说明.

3. 求证: 存在无穷多个正整数 n, 使得可将 $1,2,\ldots,3n$ 列成数表

$$\begin{matrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ c_1 & c_2 & \cdots & c_n \end{matrix}$$

满足如下两个条件:

(1) $a_1+b_1+c_1=a_2+b_2+c_2=\cdots=a_n+b_n+c_n$ 且为 6 的倍数;

(2) $a_1+a_2+\cdots+a_n=b_1+b_2+\cdots+b_n=c_1+c_2+\cdots+c_n$ 且为 6 的倍数.

4. 四边形 $ABCD$ 内接于圆, 其边 AB 与 DC 的延长线交于点 P, AD 与 BC 的延长线交于点 Q, 由 Q 作该圆的两条切线 QE 和 QF, 切点分别为 E, F.

求证: P, E, F 三点共线.

证明. 如图 1.4. 设 $\triangle BCP$ 的外接圆交直线 PQ 于另一点 M. 设直线 PF 交四边形 $ABCD$ 的外接圆于另一点 E', 设 Q 在直线 PF 上的投影为点 H. 记 $f(X)$ 为点 X 对四边形 $ABCD$ 外接圆的幂.

由 A,B,C,D 四点共圆, B,C,M,P 四点共圆可得 $\angle CMP=\angle CBA=\angle CDQ$, 于是 C,D,Q,M 四点共圆. 所以

$$PQ^2 = PM\cdot PQ + QM\cdot QP = f(P)+f(Q).$$

由于

$$PE'\cdot PF = f(P) = PQ^2 - f(Q) = PQ^2 - QF^2 = PH^2 - FH^2$$

$$= (PH + FH) \cdot (PH - FH) = PF \cdot (PH - FH),$$

可得 $PE' = PH - FH$, 于是 H 是线段 $E'F$ 的中点, 所以点 E 与 E' 重合, 从而 P, E, F 三点共线.

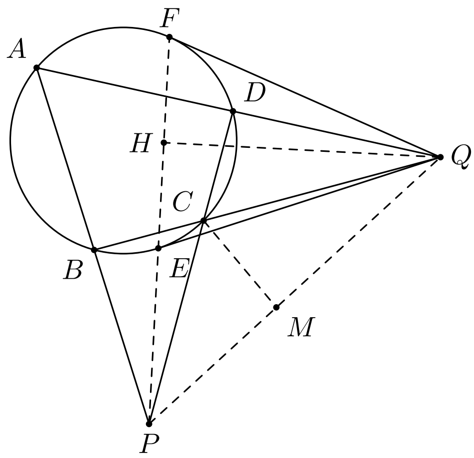

图 1.4

□

注. 根据配极理论, P 在点 Q 关于圆的极线上, 而 EF 为点 Q 关于圆的极线上, 所以 P, E, F 三点共线.

5. 设 $A = \{1, 2, 3, \ldots, 17\}$. 对于映射 $f : A \to A$, 记 $f^{[1]}(x) = f(x)$, $f^{[k+1]}(x) = f(f^{[k]}(x))$ $(k \in \mathbb{N}^*)$.

设从 A 到 A 的一一映射 f 满足条件: 存在正整数 M, 使得

(1) 当 $m < M$, $1 \leqslant i \leqslant 16$ 时, 有

$$f^{[m]}(i+1) - f^{[m]}(i) \not\equiv \pm 1 \pmod{17},$$
$$f^{[m]}(1) - f^{[m]}(17) \not\equiv \pm 1 \pmod{17}.$$

(2) 当 $1 \leqslant i \leqslant 16$ 时, 有

$$f^{[M]}(i+1) - f^{[M]}(i) \equiv 1 \text{ 或 } -1 \pmod{17},$$
$$f^{[M]}(1) - f^{[M]}(17) \equiv 1 \text{ 或 } -1 \pmod{17}.$$

试对满足上述条件的所有 f, 求所对应的 M 的最大可能值, 并证明你的结论.

6. 设非负数列 $a_1, a_2, \ldots$ 满足条件

$$a_{n+m} \leqslant a_n + a_m, \quad m, n \in \mathbb{N}^*.$$

求证: 对任意 $n \geqslant m$ 均有
$$a_n \leqslant m a_1 + \left(\frac{n}{m} - 1\right) a_m.$$

1998 年中国数学奥林匹克

1. 在一个非钝角 $\triangle ABC$ 中, $AB > AC$, $\angle B = 45^\circ$, O 和 I 分别是 $\triangle ABC$ 的外心和内心, 且 $\sqrt{2}OI = AB - AC$. 求 $\sin A$.

2. 对于给定的大于 1 的正整数 n, 是否存在 $2n$ 个两两不同的正整数 $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n$, 同时:

(1) $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = b_1 + b_2 + \cdots + b_n$;

(2) $n - 1 > \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i - b_i}{a_i + b_i} > n - 1 - \frac{1}{1998}$.

请说明理由.

3. 设 $S = \{1, 2, \ldots, 98\}$, 求最小正整数 n, 使得 S 的任一 n 元子集中都可以选出 10 个数, 无论怎样将这 10 个数均分成两组, 总有一组中存在一个数与另外 4 个数都互素, 而另一组中总有一个数与另外 4 个数都不互素.

4. 求所有大于 3 的正整数 n, 使得 $1 + \mathrm{C}_n^1 + \mathrm{C}_n^2 + \mathrm{C}_n^3$ 整除 2^{2000}.

5. 设 D 为锐角 $\triangle ABC$ 内部一点, 且满足条件:

$$DA \cdot DB \cdot AB + DB \cdot DC \cdot BC + DC \cdot DA \cdot CA = AB \cdot BC \cdot CA.$$

试确定点 D 的几何位置, 并证明你的结论.

6. 设 $n \geqslant 2$, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ 均为实数, 且

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + \sum_{i=1}^{n-1} x_i x_{i+1} = 1.$$

对于每一个固定的 k ($k \in \mathbb{N}^*$, $1 \leqslant k \leqslant n$), 求 $|x_k|$ 的最大值.

1999 年中国数学奥林匹克

1. 在锐角 $\triangle ABC$ 中, $\angle C > \angle B$. 点 D 是边 BC 上一点, 使得 $\angle ADB$ 是钝角, H 是 $\triangle ABD$ 的垂心, 点 F 在 $\triangle ABC$ 内部且在 $\triangle ABD$ 的外接圆周上. 求证: 点 F 是 $\triangle ABC$ 垂心的充分必要条件是: HD 平行于 CF 且 H 在 $\triangle ABC$ 的外接圆周上.

2. 给定实数 a, 设实多项式数列 $\{f_n(x)\}$ 满足

$$\begin{cases} f_0(x)=1, \\ f_{n+1}(x)=xf_n(x)+f_n(ax), \quad n=0,1,2,\dots. \end{cases}$$

(1) 求证:

$$f_n(x)=x^nf_n\left(\frac{1}{x}\right), \quad n=0,1,2,\dots.$$

(2) 求 $f_n(x)$ 的表达式.

解. 当 $a=1$ 时, 归纳可知 $f_n(x)=(x+1)^n$, 显然有 $f_n(x)=x^nf_n(1/x)$.

当 $a\neq 1$ 时, 对非负整数 n,k, 记

$$[n]_a=[n]\coloneqq 1+a+a^2+\cdots+a^{n-1}=\frac{1-a^n}{1-a},$$

$$[n]!_a=[n]!\coloneqq [1][2]\cdots[n]=\frac{\prod_{k=1}^n(1-a^n)}{(1-a)^n},$$

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_a=\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}\coloneqq \frac{[n]!}{[k]!\,[n-k]!}=\frac{\prod_{i=1}^n(1-a^i)}{\prod_{i=1}^k(1-a^i)\prod_{i=1}^{n-k}(1-a^i)},$$

那么对任意正整数 n,k, 有

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} n \\ k-1 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}a^k&=\frac{[n]!}{[k-1]!\,[n-k+1]!}+\frac{[n]!}{[k]!\,[n-k]!}a^k \\ &=\frac{[n]!}{[k]!\,[n-k+1]!}\left([k]+[n-k+1]a^k\right) \\ &=\frac{[n]!}{[k]!\,[n-k+1]!}\frac{(1-a^k)+(1-a^{n-k+1})a^k}{1-a} \\ &=\frac{[n]!}{[k]!\,[n-k+1]!}\cdot\frac{1-a^{n+1}}{1-a} \\ &=\frac{[n]!\,[n+1]}{[k]!\,[n-k+1]!}=\begin{bmatrix} n+1 \\ k \end{bmatrix},\end{aligned}$$

不难发现 $f_n(x)$ 是一个 n 次多项式, 设

$$f_n(x)=c_{n,0}+c_{n,1}x+\cdots+c_{n,n}x^n,$$

显然 $c_{n,0}=c_{n,n}=1$, 对比等式 $f_{n+1}(x)=xf_n(x)+f_n(ax)$ 两边 x^k 系数得

$$c_{n+1,k}=c_{n,k-1}+c_{n,k}a^k.$$

注意到 $\begin{bmatrix} n \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n \\ n \end{bmatrix} = 1$ 且 $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$ 与 $c(n,k)$ 的递推关系相同, 于是对所有非负整数 n, k, 有

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = c(n,k),$$

所以

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} x^k.$$

由于 $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n \\ n-k \end{bmatrix}$, 所以

$$f_n\left(\frac{1}{x}\right) = \sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} \left(\frac{1}{x}\right)^k = \frac{1}{x^n} \sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ n-k \end{bmatrix} x^{n-k} = \frac{1}{x^n} \sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} x^k = \frac{1}{x^n} f(x).$$

□

注. $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q$ *通常称为 q-模拟 (q-analog).*

3. MO 太空城由 99 个空间站组成. 任两空间站之间都有管形通道相连. 规定其中 99 条通道为双向通行的主干道, 其余通道严格单向通行. 如果某四个空间站可以通过它们之间的通道从其中任一站到达另外任一站, 则称这四个站的集合为一个互通四站组.

试为 MO 太空城设计一个方案, 使得互通四站组的数目最大 (请具体算出该最大数, 并证明你的结论).

4. 设 m 是给定的整数. 求证: 存在整数 a, b 和 k, 其中 a, b 不能被 2 整除, $k \geqslant 0$, 使得

$$2n = a^{19} + b^{99} + k \cdot 2^{1999}.$$

5. 求最大的实数 λ, 使得当实系数多项式 $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ 的所有根都是非负实数时, 只要 $x \geqslant 0$, 就有

$$f(x) \geqslant \lambda(x-a)^3,$$

并问上式中等号何时成立?

6. 设 $4 \times 4 \times 4$ 的大正方体由 64 个单位正方体组成. 选取其中的 16 个单位正方体涂成红色, 使得大正方体中每个有 4 个单位正方体构成的 $1 \times 1 \times 4$ 的小长方体中, 都恰有 1 个红正方体. 问 16 个红正方体共有多少种不同取法? 说明理由.

2000 年中国数学奥林匹克

1. 设 a,b,c 为三角形 ABC 的三条边, $a\leqslant b\leqslant c$, R 和 r 分别为三角形 ABC 的外接圆半径和内切圆半径, 令 $f=a+b-2R-2r$, 试用 $\angle C$ 的大小来判定 f 的符号.

2. 数列 $\{a_n\}$ 定义如下:

$$a_1=0,\qquad a_2=1,\qquad a_n=\frac{1}{2}na_{n-1}+\frac{1}{2}n(n-1)a_{n-2}+(-1)^n\Big(1-\frac{n}{2}\Big),\quad n\geqslant 3.$$

试求

$$f_n=a_n+2\mathrm{C}_n^1a_{n-1}+3\mathrm{C}_n^2a_{n-2}+\cdots+(n-1)\mathrm{C}_n^{n-2}a_2+n\mathrm{C}_n^{n-1}a_1$$

的最简表达式.

解. 设 $b_n=a_n/n!$, 则

$$\frac{a_n}{n!}=\frac{a_{n-1}}{2(n-1)!}+\frac{a_{n-2}}{2(n-2)!}+\frac{(-1)^n(1-n/2)}{n!},$$
$$b_n=\frac{1}{2}b_{n-1}+\frac{1}{2}b_{n-2}+\frac{(-1)^n}{n!}+\frac{(-1)^{n-1}}{2(n-1)!}.$$

整理得

$$(b_n-b_{n-1})+\frac{1}{2}(b_{n-1}+b_{n-2})=\frac{(-1)^n}{n!}+\frac{(-1)^{n-1}}{2(n-1)!},$$
$$b_n-b_{n-1}-\frac{(-1)^n}{n!}=-\frac{1}{2}\Big(b_{n-1}-b_{n-2}-\frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!}\Big).$$

而 $b_2-b_1-(-1)^2/2!=0$, 于是 $b_n=b_{n-1}+(-1)^n/n!$ 对所有 $n\geqslant 2$ 成立, 此时

$$b_n=b_1+\sum_{k=2}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}.$$

那么

$$g_n=\frac{f_n}{n!}=\frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n-1}(k+1)\binom{n}{k}a_{n-k}=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{k+1}{k!}\cdot\frac{a_{n-k}}{(n-k)!}=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{k+1}{k!}b_{n-k},$$

于是

$$\begin{aligned}
g_{n+1}-g_n&=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{k+1}{k!}(b_{n-k+1}-b_{n-k})\\
&=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{k+1}{k!}\cdot\frac{(-1)^{n-k+1}}{(n-k+1)!}\\
&=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^{n-k+1}k}{k!\,(n-k+1)!}+\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^{n-k+1}}{k!\,(n-k+1)!}\\
&=\sum_{k=1}^{n-1}\frac{(-1)^{n-k+1}}{(k-1)!\,(n-k+1)!}+\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^{n-k+1}}{k!\,(n-k+1)!}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&= \frac{1}{n!}\sum_{k=2}^{n}(-1)^k\binom{n}{k} + \frac{1}{(n+1)!}\sum_{k=2}^{n+1}(-1)^k\binom{n+1}{k}\\&= \frac{n-1}{n!} + \frac{n}{(n+1)!} = \frac{1}{(n-1)!} - \frac{1}{(n+1)!}.\end{aligned}$$

利用 $g_1 = f_1 = 0$, 所以

$$f_n = n!\,g_n = n!\left(\sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{(k-2)!} - \frac{1}{k!}\right) + g_1\right) = n!\left(\frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} - \frac{1}{(n-1)!} - \frac{1}{n!}\right) = 2n! - n - 1.$$

□

3. 某乒乓球俱乐部组织交流活动, 安排符合以下规则的双打赛程表, 规则为:

(1) 每名参赛者至多属于两个对子;

(2) 任意两个不同对子之间至多进行一次双打;

(3) 凡表中同属一对的两人不在任何双打中作为对手相遇.

统计个人参加的双打次数, 约定将所有不同的次数组成的集合称为“赛次集”.

给定由不同的正整数组成的集合 $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$, 其中每个数都能被 6 整除. 试问最少必须有多少人参加活动, 才可以安排符合上述规则的赛程表, 使得相应的赛次集恰为 A. 请证明你的结论.

4. 设 $n \geqslant 2$, 对 n 元有序实数组 $A = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ 令

$$b_k = \max_{1\leqslant i\leqslant k} a_i, \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

称 $B = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ 为 A 的“创新数组”, 称 B 中不同元素个数为 A 的“创新阶数”.

考察 $1, 2, \ldots, n$ 的所有排列 (将每种排列视为一个有序数组), 对其中创新阶数为 2 的所有排列, 求它们的每一项的算术平均值.

5. 若对正整数 n, 存在 k, 使得

$$n = n_1 n_2 \cdots n_k = 2^{\frac{1}{2^k}(n_1-1)(n_2-1)\cdots(n_k-1)} - 1$$

其中 $n_1, n_2, \ldots, n_k$ 都是大于 3 的整数, 则称 n 具有性质 P. 求具有性质 P 的所有数 n.

6. 某次考试有 5 道选择题, 每题都有 4 个不同答案供选择, 每人每题恰选一个答案. 在 2000 份答卷中发现存在一个 n, 使得任何 n 份答案都存在 4 份, 其中每两份的答案都至多 3 题相同. 求 n 的最小可能值.

2001 年中国数学奥林匹克

1. 给定 a, $\sqrt{2}<a<2$. 内接于单位圆 Γ 的凸四边形 $ABCD$ 满足以下条件:

(1) 圆心在该凸四边形内部;

(2) 最大边长是 a, 最小边长是 $\sqrt{4-a^2}$.

过点 A,B,C,D 依次作圆 Γ 的 4 条切线 $\ell_A,\ell_B,\ell_C,\ell_D$. 已知 ℓ_A 与 ℓ_B, ℓ_B 与 ℓ_C, ℓ_C 与 ℓ_D, ℓ_D 与 ℓ_A 分别交于点 A',B',C',D'. 求面积之比 $\dfrac{S_{\text{四边形 }A'B'C'D'}}{S_{\text{四边形 }ABCD}}$ 的最大值与最小值.

2. 设 $X=\{1,2,\ldots,2001\}$. 求最小的正整数 m, 满足: 对 X 的任何一个 m 元子集 W, 都存在 $u,v\in W$ (u 和 v 可以相同), 使得 $u+v$ 是 2 的方幂.

3. 在正 n 边形的每个顶点上各停有 1 只喜鹊, 偶受惊吓使得众喜鹊都飞去, 一段时间后, 它们又都回到这些点上, 仍是每个顶点上 1 只, 但未必都回到原来的顶点. 求所有正整数 n, 使得一定存在 3 只喜鹊, 以它们前后所在的顶点分别形成的三角形或同为锐角三角形, 或同为直角三角形, 或同为钝角三角形.

4. 设 $a,b,c,a+b-c,b+c-a,c+a-b,a+b+c$ 是 7 个两两不同的素数, a,b,c 中有两数之和是 800. 设 d 是这 7 个素数中最大数与最小数之差. 求 d 的最大可能值.

5. 将周长为 24 的圆周等分成 24 段, 从 24 个分点中选取 8 个点, 使得其中任何两点间所夹的弧长都不等于 3 和 8. 问满足要求的 8 点组的不同取法共有多少种? 说明理由.

6. 记 $a=2001$, 设 A 是满足下列条件的正整数对 (m,n) 所组成的集合:

(1) $m<2a$;

(2) $2n\mid(2am-m^2+n^2)$;

(3) $n^2-m^2+2mn\leqslant 2a(n-m)$.

令 $f=\dfrac{2am-m^2-mn}{n}$, 求 $\min\limits_{(m,n)\in A} f$ 和 $\max\limits_{(m,n)\in A} f$.

2002 年中国数学奥林匹克

1. 三角形 ABC 的三边长分别为 a, b, c, $b < c$, AD 是 $\angle A$ 的内角平分线, 点 D 在 BC 上.

(1) 求在线段 AB, AC 内分别存在点 E, F (不是端点) 满足 $BE = CF$ 和 $\angle BDE = \angle CDF$ 的充分必要条件 (用 $\angle A, \angle B, \angle C$ 表示);

(2) 在点 E 和 F 存在的情况下, 用 a, b, c 表示 BE 的长.

2. 设多项式序列 $\{P_n(x)\}$ 满足:

$$P_1(x) = x^2 - 1, \quad P_2(x) = 2x(x^2 - 1)$$

且

$$P_{n+1}(x)P_{n-1}(x) = P_n^2(x) - (x^2 - 1)^2, \quad n = 2, 3, \ldots.$$

设 S_n 为 $P_n(x)$ 各项系数的绝对值之和, 对于任意正整数 n, 求非负整数 k_n, 使得 $2^{-k_n} S_n$ 为奇数.

解. 由题意,

$$P_{n+1}(x)P_{n-1}(x) = P_n^2(x) - (x^2 - 1)^2, \quad P_{n+2}(x)P_n(x) = P_{n+1}^2(x) - (x^2 - 1)^2,$$

两式相减得

$$\begin{gathered}P_n(x)(P_{n+2}(x) + P_n(x)) = P_{n+1}(x)(P_{n+1}(x) + P_{n-1}(x)), \\ \frac{P_{n+2}(x) + P_n(x)}{P_{n+1}(x)} = \frac{P_{n+1}(x) + P_{n-1}(x)}{P_n(x)},\end{gathered}$$

所以

$$\begin{gathered}\frac{P_{n+2}(x) + P_n(x)}{P_{n+1}(x)} = \frac{P_3(x) + P_1(x)}{P_2(x)} = \frac{(4x^2 - 1)(x^2 - 1) + (x^2 - 1)}{2x(x^2 - 1)} = 2x, \\ P_{n+2}(x) - 2xP_{n+1}(x) + P_n(x) = 0.\end{gathered}$$

利用特征方程解得

$$P_n(x) = \frac{1}{2}\sqrt{x^2 - 1}\Big(\big(x + \sqrt{x^2 - 1}\big)^n - \big(x - \sqrt{x^2 - 1}\big)^n\Big).$$

由二项式定理得

$$\begin{aligned}P_n(x) &= \frac{1}{2}\sqrt{x^2 - 1}\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k}(x^2 - 1)^{k/2} - \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}x^{n-k}(x^2 - 1)^{k/2}\right) \\ &= \sum_{k=0}^{\lfloor\frac{n-1}{2}\rfloor}\binom{n}{2k+1}x^{n-2k-1}(x^2 - 1)^{k+1} \\ &= \sum_{k=0}^{\lfloor\frac{n-1}{2}\rfloor}\binom{n}{2k+1}x^{n-2k-1}\sum_{\ell=0}^{k+1}(-1)^{\ell}\binom{k+1}{\ell}x^{2(k+1-\ell)}\end{aligned}$$

$$= \sum_{k=0}^{\left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor} \binom{n}{2k+1} \sum_{\ell=0}^{k+1} (-1)^{\ell} \binom{k+1}{\ell} x^{n-2\ell+1}.$$

所以

$$\begin{aligned}
S_n &= \sum_{k=0}^{\left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor} \binom{n}{2k+1} \sum_{\ell=0}^{k+1} \binom{k+1}{\ell} \\
&= \sum_{k=0}^{\left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor} \binom{n}{2k+1} 2^{k+1} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (\sqrt{2})^k - \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} (\sqrt{2})^k \right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \left((1+\sqrt{2})^n - (1-\sqrt{2})^n \right)
\end{aligned}$$

对正整数 n, 设

$$a_n + b_n\sqrt{2} = (1+\sqrt{2})^n,$$

其中 a_n, b_n 为正整数, 那么 $S_n = 2b_n$, 并且由二项式定理知 a_n 都是奇数.

令 $v_2(n)$ 为 n 的素因子分解中 2 的次数, 我们用归纳法证明: $v_2(b_n) = v_2(n)$. 显然 $v_2(b_1) = 0 = v_2(1)$ 成立, 假设 $v_2(b_n) = v_2(n)$ 对小于 n 的正整数成立,

(1) 若 n 是偶数, 设 $n = 2m$, 则 $b_n = 2a_m b_m$, 于是

$$v_2(n) = v_2(2a_m b_m) = v_2(b_m) + 1 = v_2(m) + 1 = v_2(2m) = v_2(n).$$

(2) 若 n 是奇数, 设 $n = 2m+1$, 则 $b_n = a_m b_{m+1} + b_m a_{m+1}$. 由于 b_m, b_{m+1} 一奇一偶, 于是 b_n 是奇数,

$$v_2(b_n) = 0 = v_2(n).$$

由数学归纳法可知 $v_2(b_n) = v_2(n)$ 对所有正整数 n 成立.

所以

$$k_n = v_2(S_n) = v_2(2b_n) = v_2(n) + 1.$$

□

3. 18 支足球队进行单循环赛, 即每轮将 18 支球队分成 9 组, 每组的两队赛一场, 下一轮重新分组进行比赛, 共赛 17 轮, 使得每队都与另外 17 支队各赛一场. 按任意可行的程序比赛了 n 轮之后, 总存在 4 支球队, 它们之间总共只赛了一场. 求 n 的最大可能值.

4. 对于平面上任意 4 个不同的点 P_1, P_2, P_3, P_4, 求比值

$$\frac{\sum\limits_{1 \leqslant i<j \leqslant 4} P_i P_j}{\min\limits_{1 \leqslant i<j \leqslant 4} P_i P_j}$$

的最小值.

5. 平面上横纵坐标都为有理数的点称为有理点. 求证: 平面上的全体有理点可分成 3 个两两不交的集合, 满足条件

(1) 在以每个有理点为圆心的任一圆内一定包含 3 个点分别属于这 3 个集合;

(2) 在任何一条直线上都不可能有 3 个点分别属于这 3 个集合.

6. 给定 $c \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$. 求最小的常数 M, 使对任意整数 $n \geqslant 2$ 及实数 $0 < a_1 \leqslant a_2 \leqslant \cdots \leqslant a_n$, 只要满足

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} ka_k = c\sum_{k=1}^{n} a_k$$

总有

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \leqslant M\sum_{k=1}^{m} a_k,$$

其中 $m = \lfloor cn \rfloor$ 表示不超过 cn 的最大整数.

2003 年中国数学奥林匹克

1. 设点 I, H 分别为锐角 $\triangle ABC$ 的内心与垂心, 点 B_1, C_1 分别为边 AC, AB 的中点. 已知射线 B_1I 交边 AB 于点 B_2 ($B_2 \neq B$), 射线 C_1I 交 AC 的延长线于点 C_2, B_2C_2 与 BC 相交于点 K, A_1 为 $\triangle BHC$ 的外心. 试证: A, I, A_1 三点共线的充要条件是 $\triangle BKB_2$ 和 $\triangle CKC_2$ 的面积相等.

2. 求出同时满足条件的集合 S 的元素个数的最大值:

(1) S 中每个元素都是不超过 100 的正整数;

(2) 对于 S 中任意两个不同的元素 a, b, 都存在 S 中的元素 c, 使得 a 与 c 的最大公约数等于 1, 并且 b 与 c 的最大公约数也等于 1;

(3) 对于 S 中任意两个不同的元素 a, b, 都存在 S 中异于 a, b 的元素 d, 使得 a 与 d 的最大公约数大于 1, 并且 b 与 d 的最大公约数也大于 1.

3. 给定正整数 n, 求最小的正数 λ, 使得对于 $\theta_i \in (0, \pi/2)$, $(i = 1, 2, \ldots, n)$, 只要

$$\tan\theta_1 \tan\theta_2 \ldots \tan\theta_n = 2^{\frac{n}{2}},$$

就有 $\cos\theta_1 + \cos\theta_2 + \cdots + \cos\theta_n$ 不大于 λ.

4. 求所有满足 $a \geqslant 2$, $m \geqslant 2$ 的三元正整数组 (a, m, n), 使得 $a^n + 203$ 是 $a^m + 1$ 的倍数.

5. 某公司需要录用一名秘书, 共有 10 人报名, 公司经理决定按照求职报名的顺序逐个面试, 前 3 个人面试后一定不录用. 自第 4 个人开始将他与前面面试过的人相比较, 如果他的能力超过了前面所有已面试过的人, 就录用他, 否则就不录用, 继续面试下一个. 如果前 9 个人都不录用, 那么就录用最后一个面试的人.

假定这 10 个人的能力各不相同, 可以按能力由强到弱排为第 1, 第 2, $\ldots$, 第 10. 显然该公司到底录用哪一个人, 与这 10 个人的报名顺序有关. 大家知道, 这样的排列共 10! 种. 我们以 A_k 表示第 k 个人能够被录用的不同报名顺序的数目, 以 $A_k/10!$ 表示他被录用的可能性.

证明: 在该公司经理的方针之下, 有

(1) $A_1 > A_2 > \cdots > A_8 = A_9 = A_{10}$;

(2) 该公司有超过 70% 的可能性录取到能力最强的 3 个人之一, 而只有不超过 10% 的可能性录用到能力最弱的 3 个人之一.

6. 设 a, b, c, d 为正实数, 满足 $ab + cd = 1$, 点 $P_i(x_i, y_i)$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ 是以原点为圆心的单位圆周上的四个点. 求证:

$$(ay_1 + by_2 + cy_3 + dy_4)^2 + (ax_4 + bx_3 + cx_2 + dx_1)^2 \leqslant 2\left(\frac{a^2 + b^2}{ab} + \frac{c^2 + d^2}{cd}\right)^2.$$

2004 年中国数学奥林匹克

1. 凸四边形 $EFGH$ 的顶点 E,F,G,H 分别在凸四边形 $ABCD$ 的边 AB,BC,CD,DA 上, 满足:

$$\frac{AE}{EB}\cdot\frac{BF}{FC}\cdot\frac{CG}{GD}\cdot\frac{DH}{HA}=1;$$

而点 A,B,C,D 分别在凸四边形 $E_1F_1G_1H_1$ 的边 $H_1E_1,E_1F_1,F_1G_1,G_1H_1$ 上, 满足:

$$E_1F_1 \parallel EF,\quad F_1G_1 \parallel FG,\quad G_1H_1 \parallel GH,\quad H_1E_1 \parallel HE.$$

已知 $E_1A/AH_1=\lambda$, 求 F_1C/CG_1 的值.

2. 已给正整数 c, 设数列 $x_1,x_2,\ldots$ 满足

$$x_1=c,\quad 且\quad x_n=x_{n-1}+\left\lfloor\frac{2x_{n-1}-(n+2)}{n}\right\rfloor+1,\quad n=2,3,\ldots.$$

求数列 $\{x_n\}$ 的通项公式.

3. 设 M 是平面上 n 个点组成的集合, 满足:

(1) M 中存在 7 个点是一个凸七边形的 7 个顶点;

(2) 对 M 中任意 5 个点, 若这 5 个点是一个凸五边形的 5 个顶点, 则此凸五边形内部至少含有 M 中的一个点.

求 n 的最小值.

4. 给定实数 a 和正整数 n, 求证:

(1) 存在唯一的实数数列 $x_0,x_1,\ldots,x_n,x_{n+1}$, 满足

$$\begin{cases}x_n=x_{n+1}=0,\\ \dfrac{1}{2}(x_{i-1}+x_{i+1})=x_i+x_i^3-a^3,\quad i=1,2,\ldots,n.\end{cases}$$

(2) (1) 中的数列 $x_0,x_1,\ldots,x_n,x_{n+1}$ 满足

$$|x_i|\leqslant|a|,\quad i=0,1,\ldots,n+1.$$

5. 给定正整数 $n\geqslant 2$, 设正整数 $a_i\ (i=1,2,\ldots,n)$ 满足 $a_1<a_2<\cdots<a_n$ 以及 $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}\leqslant 1$. 求证: 对任意实数 x, 有

$$\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i^2+x^2}\right)^2\leqslant\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{a_1(a_1-1)+x^2}.$$

6. 证明: 除了有限个正整数外, 其它正整数 n 均可表示为 2004 个正整数之和:

$$n=a_1+a_2+\cdots+a_{2004},$$

且满足: $1\leqslant a_1<a_2<\cdots<a_{2004}$, $a_i\mid a_{i+1}$, $i=1,2,\ldots,2003$.

2005 年中国数学奥林匹克

1. 设 $\theta_i \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, $i=1,2,3,4$. 证明: 存在 $x \in \mathbb{R}$, 使得如下两个不等式

$$\cos^2\theta_1\cos^2\theta_2 - (\sin\theta_1\sin\theta_2 - x)^2 \geqslant 0,$$
$$\cos^2\theta_3\cos^2\theta_4 - (\sin\theta_3\sin\theta_4 - x)^2 \geqslant 0$$

同时成立的充要条件是

$$\sum_{i=1}^{4}\sin^2\theta_i \leqslant 2\left(1+\prod_{i=1}^{4}\sin\theta_i+\prod_{i=1}^{4}\cos\theta_i\right).$$

2. 一圆与 $\triangle ABC$ 的三边 BC, CA, AB 的交点依次为 $D_1, D_2; E_1, E_2; F_1, F_2$. 线段 D_1E_1 与 D_2F_2 的交于点 L, 线段 E_1F_1 与 E_2D_2 的交于点 M, 线段 F_1D_1 与 F_2E_2 的交于点 N. 证明: AL, BM, CN 三线共点.

3. 如图 1.5 所示, 圆形的水池被分割为 $2n$ $(n \geqslant 5)$ 个 “格子”, 我们把有公共隔墙 (公共边或公共弧) 的 “格子” 称为相邻的, 从而每个 “格子” 都有 3 个邻格. 水池中一共跳入了 $4n+1$ 只青蛙, 青蛙难于安静共处, 只要某个 “格子” 中有不少于 3 只青蛙, 那么迟早一定会有其中 3 只分别跳往三个不同邻格. 证明: 只要经过一段时间过后, 青蛙便会在水池中相对均匀分布.

所谓大致均匀分布, 就是任取其中一个 “格子”, 或者它里面有青蛙, 或者它的三个邻格里都有青蛙.

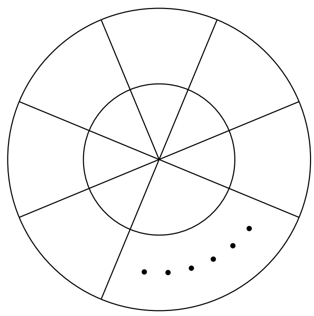

图 1.5

4. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足条件

$$a_1 = \frac{21}{16}, \quad 及 \quad 2a_n - 3a_{n-1} = \frac{3}{2^{n+1}}, \quad n \geqslant 2.$$

设 m 是正整数, $m \geqslant 2$. 证明: 当 $n \leqslant m$ 时, 有

$$\left(a_n + \frac{3}{2^{n+3}}\right)^{\frac{1}{m}}\left(m - \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{n(m-1)}{m}}\right) < \frac{m^2-1}{m-n+1}.$$

5. 在面积为 1 的矩形 $ABCD$ 中 (包括边界) 有 5 个点, 其中任意三点不共线, 求以这 5 个点为顶点的所有三角形中, 面积不大于 1/4 的三角形的个数的最小值.

6. 求方程

$$2^x3^y - 5^z7^w = 1$$

的所有非负整数解 (x, y, z, w).

2006 年中国数学奥林匹克

1. 实数 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ 满足 $a_1+a_2+\cdots+a_n=0$, 求证:

$$\max_{1\leqslant k\leqslant n}\left\{a_k^2\right\}\leqslant\frac{n}{3}\sum_{i=1}^{n-1}(a_k-a_{k+1})^2.$$

2. 正整数 $a_1, a_2, \ldots, a_{2006}$ (可以有相同的) 使得 $\frac{a_1}{a_2}, \frac{a_2}{a_3}, \ldots, \frac{a_{2005}}{a_{2006}}$ 两两不相等, 问: $a_1, a_2, \ldots, a_{2006}$ 最少有多少个不相同的数?

3. 正整数 m, n, k 满足: $mn=k^2+k+3$, 证明不定方程

$$x^2+11y^2=4m \quad 和 \quad x^2+11y^2=4n$$

中至少有一个奇数解 (x, y).

4. 在直角三角形 ABC 中, $\angle ACB=90^\circ$, $\triangle ABC$ 的内切圆 O 分别与边 BC, CA, AB 相切于点 D, E, F, 连接 AD, 与内切圆 O 相交于点 P, 连接 BP, CP, 若 $\angle BPC=90^\circ$, 求证 $AE+AP=PD$.

5. 实数列 $\{a_n\}$ 满足:

$$a_1=\frac{1}{2}, \qquad a_{k+1}=-a_k+\frac{1}{2-a_k}, \quad k=1,2,\ldots.$$

证明不等式

$$\left(\frac{n}{2(a_1+a_2+\cdots+a_n)}-1\right)^n\leqslant\left(\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\right)^n\left(\frac{1}{a_1}-1\right)\left(\frac{1}{a_2}-1\right)\cdots\left(\frac{1}{a_n}-1\right).$$

6. 设 X 是一个 56 元集合, 求最小的正整数 n, 使得对 X 的任意 15 个子集, 只要它们中任何 7 个的并的元素个数都不少于 n, 则这 15 个子集中一定存在 3 个, 它们的交非空.

2007 年中国数学奥林匹克

1. 设 a, b, c 是给定复数, 记 $|a+b|=m$, $|a-b|=n$, 已知 $mn \neq 0$, 求证:

$$\max\{|ac+b|, |a+bc|\} \geqslant \frac{mn}{\sqrt{m^2+n^2}}.$$

2. 试证明:

(1) 若 $2n-1$ 为素数, 对于任意 n 个互不相同的正整数 $a_1, a_2, \ldots, a_n$, 都存在 $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, 使得

$$\frac{a_i+a_j}{\gcd(a_i, a_j)} \geqslant 2n-1;$$

(2) 若 $2n-1$ 为合数, 则存在 n 个互不相同的正整数 $a_1, a_2, \ldots, a_n$, 都有

$$\frac{a_i+a_j}{\gcd(a_i, a_j)} < 2n-1.$$

3. 已知 $a_1, a_2, \ldots, a_{11}$ 是 11 个互不相同的正整数, 且总和小于 2007. 在黑板上依次写着 $1, 2, \ldots, 2007$ 这 2007 个数. 将连续的 22 次操作定义为一个操作组: 第 i 次操作可以从黑板上现有的数中任选一个数, 当 $1 \leqslant i \leqslant 11$ 时, 加上 a_i; 当 $12 \leqslant i \leqslant 22$ 时, 减去 a_{i-11}. 如果最终结果为 $1, 2, \ldots, 2007$ 的偶排列, 则称这个操作组是优的; 如果最终结果为 $1, 2, \ldots, 2007$ 的奇排列, 则称这个操作组是次优的. 问优的操作组和次优的操作组哪种多, 多多少?

注: $1, 2, \ldots, n$ 的一个排列 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ 称为偶排列, 如果 $\prod_{i>j}(x_i-x_j)$ 为正数, 否则称为奇排列.

4. 设 O 和 I 分别为 $\triangle ABC$ 的外心和内心, $\triangle ABC$ 的内切圆与边 BC, CA, AB 分别相切于点 D, E, F, 直线 FD 与 CA 相交于点 P, 直线 DE 与 AB 相交于点 Q, 点 M, N 分别为线段 PE, QF 的中点, 求证 $OI \perp MN$.

5. 设有界数列 $\{a_n\}_{n\geqslant 1}$ 满足

$$a_n = \sum_{k=n}^{2n+2006} \frac{a_k}{k+1} + \frac{1}{2n+2007}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots,$$

证明:

$$a_n < \frac{1}{n}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots.$$

6. 试求不小于 9 的最小正整数 n, 满足: 对任给的 n 个整数 (可以相同) $a_1, a_2, \ldots, a_n$, 总存在 9 个数 $a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_9}$ $(1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_9 \leqslant n)$ 以及 $b_i \in \{4, 7\}$ $(i = 1, 2, \ldots, 9)$, 使得 $b_1 a_{i_1} + b_2 a_{i_2} + \cdots + b_9 a_{i_9}$ 为 9 的倍数.

2008 年中国数学奥林匹克

1. 设锐角 $\triangle ABC$ 的三边长互不相等. O 为其外心, 点 A' 在线段 AO 的延长线上, 使得 $\angle BA'A = \angle CA'A$. 过 A' 分别作 $A'A_1 \perp AC$, $A'A_2 \perp AB$, 垂足分别为 A_1, A_2. 作 $AH_A \perp BC$, 垂足为 H_A. 记 $\triangle H_A A_1 A_2$ 的外接圆半径为 R_A, 类似地可得 R_B, R_C. 求证:

$$\frac{1}{R_A} + \frac{1}{R_B} + \frac{1}{R_C} = \frac{2}{R},$$

其中 R 为 $\triangle ABC$ 的外接圆半径.

2. 给定整数 $n \geqslant 3$. 证明: 集合 $X = \{1, 2, \ldots, n^2 - n\}$ 能写成两个不相交的非空子集的并集, 使得每一个子集均不包含 n 个元素 $a_1, a_2, \ldots, a_n$, $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$, 满足

$$a_k \leqslant \frac{a_{k-1} + a_{k+1}}{2} \quad (k = 2, 3, \ldots, n-1).$$

3. 给定正整数 n, 及实数 $x_1 \leqslant x_2 \leqslant \cdots \leqslant x_n$, $y_1 \geqslant y_2 \geqslant \cdots \geqslant y_n$, 满足

$$\sum_{i=1}^{n} i x_i \geqslant \sum_{i=1}^{n} i y_i.$$

证明: 对任意实数 α, 有

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \lfloor i\alpha \rfloor \geqslant \sum_{i=1}^{n} y_i \lfloor i\alpha \rfloor.$$

4. 设 A 是正整数集的无限子集, $n > 1$ 是给定的整数. 已知: 对任意一个不整除 n 的素数 p, 集合 A 中均有无穷多个元素不被 p 整除. 证明: 对任意整数 $m > 1$, $\gcd(m, n) = 1$, 集合 A 中均存在有限个不同元素, 其和 S 满足 $S \equiv 1 \pmod{m}$, 且 $S \equiv 0 \pmod{n}$.

5. 求具有如下性质的最小正整数 n: 将正 n 边形的每一个顶点任意染上红、黄、蓝三种颜色之一, 那么这 n 个顶点中一定存在四个同色点, 它们是一个等腰梯形的顶点.

6. 试确定所有同时满足

$$q^{n+2} \equiv 3^{n+2} \pmod{p^n}, \qquad p^{n+2} \equiv 3^{n+2} \pmod{q^n}$$

的三元数组 (p, q, n), 其中 p, q 为奇素数, n 为大于 1 的整数.

2009 年中国数学奥林匹克

1. 给定锐角三角形 PBC, $PB \neq PC$. 设 A, D 分别是边 PB, PC 上的点, 连接 AC, BD, 相交于点 O. 过点 O 分别作 $OE \perp AB$, $OF \perp CD$, 垂足分别为 E, F, 线段 BC, AD 的中点分别为 M, N.

(1) 若 A, B, C, D 四点共圆, 求证: $EM \cdot FN = EN \cdot FM$;

(2) 若 $EM \cdot FN = EN \cdot FM$, 是否一定有 A, B, C, D 四点共圆? 证明你的结论.

证明. (1) 如图 1.6a. 设线段 BO, CO 的中点分别为 G, H.

由 EG, FH 分别是直角三角形 EBO, FCO 斜边上的中线, MG, MH 为三角形 OBC 的两条中位线, 那么 $EG = BO/2 = MH$, $FH = CO/2 = MG$, 并且

$$\begin{aligned}\angle EGM &= \angle EGO + \angle OGM \\ &= 2\angle ABO + \angle OGM \\ &= 2\angle DCO + \angle OHM \\ &= \angle FHO + \angle OHM \\ &= \angle FHM,\end{aligned}$$

于是 $\triangle EGM \cong \triangle MHF$, 所以 $EM = FN$, 同理 $EN = FN$, $EM \cdot FN = EN \cdot FM$.

(2) 当 $AD \mathbin{/\!/} BC$ 时, 同样有 $EM \cdot FN = EN \cdot FM$. 如图 1.6b. 设线段 BO, AO 的中点分别为 G, H.

由 EG, EH 分别是直角三角形 EBO, EAO 斜边上的中线, MG, NH 分别为三角形 OBC, OAD 的中位线, 那么

$$\frac{EG}{MG} = \frac{BO}{CO} = \frac{DO}{AO} = \frac{NH}{EH},$$

并且

$$\begin{aligned}\angle EGM &= \angle EGO + \angle OGM \\ &= (\pi - 2\angle BOE) + \angle AOB \\ &= \pi - \angle BOE + \angle AOE \\ &= \angle DOE + \angle AOE \\ &= \angle AOD + 2\angle AOE \\ &= \angle AHN + \angle AHE = \angle EHN,\end{aligned}$$

于是 $\triangle EGM \sim \triangle NHE$, 可得

$$\frac{EM}{EN} = \frac{EG}{NH} = \frac{BO}{DO},$$

同理, $FM/FN = CO/AO = BO/DE$, 所以 $EM \cdot FN = EN \cdot FM$.

□

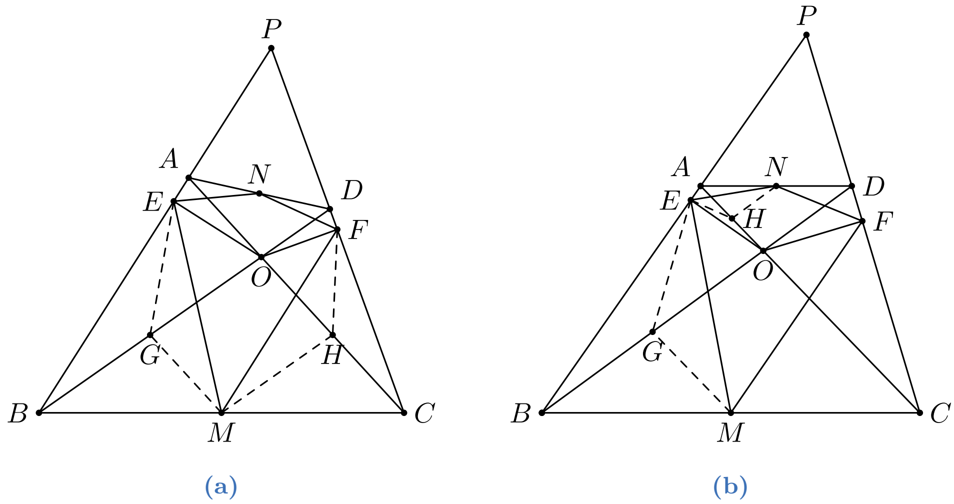

图 1.6

2. 求所有的素数对 (p,q), 使得 $pq \mid 5^p+5^q$.

解. 若 $2\mid pq$, 不妨设 $q=2$, 则 $2p\mid 5^p+25$, 由 $p\mid 5^p-5$ 可得 $p\mid 30$, 于是 $p=2,3,5$, 经检验 $(3,2),(5,2)$ 都是解.

若 $5\mid pq$, 不妨设 $q=5$, 则 $5p\mid 5^p+3125$, 从而 $p\mid 5^{p-1}+625$. 显然 $(5,5)$ 是一组解; 当 $p\neq 5$ 时, 由 $p\mid 5^{p-1}-1$ 可得 $p\mid 626$, 于是 $p=313$, 经检验 $(313,5)$ 是一组解.

当 $\gcd(pq,10)=1$ 时, $pq\mid 5^{p-1}+5^{q-1}$, 由 $p\mid 5^{p-1}-1$ 可得 $p\mid 5^{q-1}+1$. 设 $p-1=2^s(2u-1)$, $q-1=2^t(2v-1)$, 其中 p,q,u,v 是正整数. 不妨设 $s\leqslant t$, 则

$$5^{2^t(2u-1)(2v-1)}=(5^{p-1})^{2^{t-s}(2v-1)}\equiv 1 \pmod p,$$
$$5^{2^t(2u-1)(2v-1)}=(5^{q-1})^{2u-1}\equiv(-1)^{2u-1}=-1 \pmod p,$$

矛盾!

综上所述, 所有的解 (p,q) 为 $(2,3),(3,2),(2,5),(5,2),(5,5),(5,313),(313,5)$. □

3. 设 m,n 是给定的整数, $4<m<n$, $A_1A_2\cdots A_{2n+1}$ 是一个正 $2n+1$ 边形, $P=\{A_1,A_2,\ldots,A_{2n+1}\}$. 求顶点属于 P 且恰有两个内角是锐角的凸 m 边形的个数.

4. 给定整数 $n\geqslant 3$, 实数 $a_1,a_2,\ldots,a_n$ 满足

$$\min_{1\leqslant i<j\leqslant n}|a_i-a_j|=1.$$

求 $\sum\limits_{k=1}^{n}|a_k|^3$ 的最小值.

5. 凸 n 边形 P 中的每条边和每条对角线都被染为 n 种颜色中的一种. 问: 对怎样的 n, 存在一种染色方式, 使得对于这 n 种颜色中的任何 3 种不同颜色, 都能找到一个三角形, 其顶

点为多边形 P 的顶点, 且它的 3 条边分别被染为这 3 种颜色?

6. 给定整数 $n \geqslant 3$, 证明: 存在 n 个互不相同的正整数组成的集合 S, 使得对 S 的任意两个不同的非空子集 A, B, 数

$$\frac{\sum\limits_{x \in A} x}{|A|} \quad 与 \quad \frac{\sum\limits_{x \in B} x}{B}$$

是互素的合数. (这里 $\sum\limits_{x \in X} x$ 与 $|X|$ 分别表示有限数集 X 的所有元素之和及元素个数)

2010 年中国数学奥林匹克

1. 如图 1.7, 两圆 Γ_1, Γ_2 相交于 A, B 两点, 过点 B 的一条直线分别交圆 Γ_1, Γ_2 于点 C, D, 过点 B 的另一条直线分别交圆 Γ_1, Γ_2 于点 E, F, 直线 CF 分别交圆 Γ_1, Γ_2 于点 P, Q. 设 M, N 分别是弧 $\overset{\frown}{PB}$, 弧 $\overset{\frown}{QB}$ 的中点. 求证: 若 $CD = EF$, 则 C, F, M, N 四点共圆.

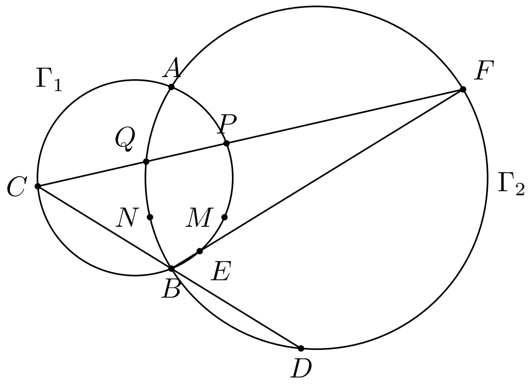

图 1.7

2. 设整数 $k \geqslant 3$, 数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_k = 2k$, 且对所有 $n > k$, 有

$$a_n = \begin{cases} a_{n-1}+1, & \text{若 } a_{n-1} \text{ 与 } n \text{ 互素,} \\ 2n, & \text{若 } a_{n-1} \text{ 与 } n \text{ 不互素.} \end{cases}$$

证明: 数列 $\{a_n - a_{n-1}\}$ 中有无穷多项是素数.

3. 设复数 a, b, c 满足: 对任意模不超过 1 的复数 z, 都有 $|az^2 + bz + c| \leqslant 1$. 求 $|bc|$ 的最大值.

4. 设 m, n 是给定的大于 1 的整数, 且 $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$ 都是整数. 证明: 存在整数集的一个子集 T, 其元素个数

$$|T| \leqslant 1 + \frac{a_m - a_1}{2n+1},$$

且对每个 $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$, 均有 $t \in T$ 及 $s \in [-n, n]$, 使得 $a_i = t + s$.

5. 我们对放置于点 $A_1, A_2, \ldots, A_n$ $(n \geqslant 3)$ 及点 O 处的卡片进行操作. 所谓一次操作是指进行下面的一种操作:

(1) 若某个点 A_i 处的卡片数目不少于 3, 则可从中取出 3 张, 在点 A_{i-1}, A_{i+1} 及 O 处各放一张 ($A_0 = A_n$, $A_{n+1} = A_1$);
或者
(2) 若点 O 处的卡片数目不少于 n, 则可以从中取出 n 张, 在点 $A_1, A_2, \ldots, A_n$ 处各放一张.

证明: 只要放置于这 $n+1$ 个点处的卡片总数不少于 n^2+3n+1, 则总能通过若干次操作, 使每个点处卡片数目均不小于 $n+1$.

6. 设 $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$ 为互不相同的正整数, 满足

$$(n+1)a_1^n + na_2^n + (n-1)a_3^n \mid (n+1)b_1^n + nb_2^n + (n-1)b_3^n,$$

对任何正整数 n 成立. 求证: 存在正整数 k, 使得 $b_i = ka_i$, $i = 1, 2, 3$.

2011 年中国数学奥林匹克

1. 设 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ $(n \geqslant 3)$ 是实数, 证明

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^2 - \sum_{i=1}^{n} a_i a_{i+1} \leqslant \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor (M-n)^2,$$

其中 $a_{n+1} = a_1$, $M = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} a_i$, $m = \min\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} a_i$.

2. 如图 1.8, 设 D 是锐角三角形 ABC 外接圆 Γ 上弧 $\overparen{BC}$ 的中点, 点 X 在弧 $\overparen{BD}$ 上, E 是弧 $\overparen{AX}$ 的中点, S 是弧 $\overparen{AC}$ 上一点, 直线 SD 与 BC 相交于点 R, SE 与 AX 相交于点 T. 证明: 若 $RT \mathbin{/\mkern-5mu/} DE$, 则 $\triangle ABC$ 的内心在直线 RT 上.

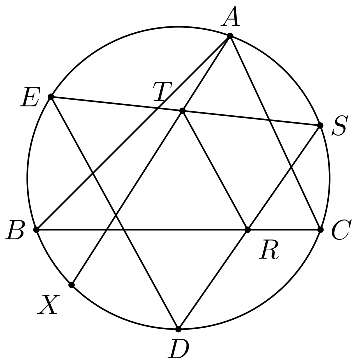

图 1.8

3. 设 A 是一个有限实数集, $A_1, A_2, \ldots, A_n$ 是 A 的非空子集, 满足下列条件:

(1) A 中所有元素之和为 0;

(2) 对任意 $x_i \in A_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, 都有 $x_1 + x_2 + \cdots + x_n > 0$,

证明: 存在 $1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leqslant n$, 使得

$$|A_{i_1} \cup A_{i_2} \cup \cdots \cup A_{i_k}| < \frac{k}{n}|A|.$$

这里 $|X|$ 表示有限集合 X 的元素个数.

4. 设 n 是给定的正整数, 集合 $S = \{1, 2, \ldots, n\}$. 对非空的有限实数集合 A 和 B, 求 $|A \triangle S| + |B \triangle S| + |C \triangle S|$ 的最小值, 其中

$$C = A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\},$$

$$X \triangle Y = \{x : x \text{ 恰好属于 } X \text{ 和 } Y \text{ 中的一个}\},$$

$|X|$ 表示有限集合 X 的元素个数.

5. 给定整数 $n \geqslant 4$, 对任意满足

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n = b_1 + b_2 + \cdots + b_n > 0$$

的非负实数 $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n$, 求

$$\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} a_i(a_i + b_i)}{\sum\limits_{i=1}^{n} b_i(a_i + b_i)}$$

的最大值.

6. 求证: 对于任意给定的正整数 m, n, 总存在无穷多组互素的正整数 a, b, 使得

$$a + b \mid am^a + bm^b.$$

2012 年中国数学奥林匹克

1. 如图 1.9, 在圆内接 $\triangle ABC$ 中, $\angle A$ 为最大角, 不含点 A 的弧 $\overparen{BC}$ 上两点 D, E 分别为弧 $\overparen{ABC}, \overparen{ACB}$ 的中点. 记过点 A, B 且与 AC 相切的圆为 $\odot O_1$, 过点 A, E 且与 AD 相切的圆为 $\odot O_2$, $\odot O_1$ 与 $\odot O_2$ 交于点 A, P. 证明: AP 平分 $\angle BAC$.

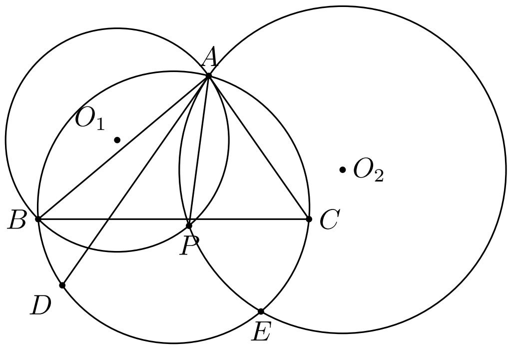

图 1.9

2. 给定素数 p. 设 $A = (a_{ij})$ 是一个 $p \times p$ 的矩阵, 满足

$$\{a_{ij} : 1 \leqslant i, j \leqslant p\} = \{1, 2, \ldots, p^2\}.$$

允许对一个矩阵作如下操作: 选取一行或一列, 将该行或该列的每个数同时加上 1 或同时减去 1. 若可以通过有限多次上述操作将 A 中的元素全变成 0, 则称 A 是一个 “好矩阵”. 求好矩阵 A 的个数.

3. 证明: 对于任意实数 $M > 2$, 总存在满足下列条件的严格递增的正整数数列 $a_1, a_2, \ldots$:

(1) 对每个正整数 i, 有 $a_i > M^i$;

(2) 当且仅当整数 $n \neq 0$ 时, 存在正整数 m 以及 $b_1, b_2, \ldots, b_m \in \{-1, 1\}$, 使得

$$n = b_1 a_1 + b_2 a_2 + \cdots + b_m a_m.$$

4. 设 $f(x) = (x+a)(x+b)$ (a, b 是给定的正实数), $n \geqslant 2$ 为给定的整数. 对满足 $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 1$ 的非负实数 $x_1, x_2, \ldots, x_n$, 求

$$F = \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \min\{f(x_i), f(x_j)\}$$

的最大值.

5. 设 n 为无平方因子的正偶数, k 为整数, p 为素数, 满足

$$p < 2\sqrt{n}, \quad p \nmid n, \quad p \mid (n + k^2).$$

证明: n 可以表示为 $ab + bc + ca$, 其中 a, b, c 为互不相同的正整数.

6. 求满足下面条件的最小正整数 k: 对集合 $S=\{1,2,\ldots,2012\}$ 的任意一个 k 元子集 A, 都存在 S 中的三个互不相同的元素 a,b,c, 使得 $a+b,b+c,c+a$ 均在集合 A 中.

2013 年中国数学奥林匹克 (一月)

1. 如图, 两个半径不相等的圆 K_1 与 K_2 交于点 A, B 两点, C, D 两点分别在圆 K_1, K_2 上, 且线段 CD 以 A 为中点, 延长 DB 与圆 K_1 交于点 E, 延长 CB 与圆 K_2 交于点 F. 设线段 CD, EF 的中垂线分别为 ℓ_1, ℓ_2. 证明:

(1) ℓ_1 与 ℓ_2 相交;

(2) 若 ℓ_1 与 ℓ_2 的交点为 P, 则三条线段 CA, AP, PE 能构成一个直角三角形.

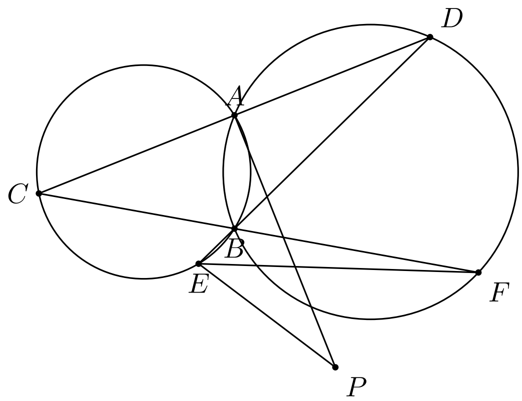

图 1.10

2. 确定所有由整数构成的集合 S, 满足: 若 $m, n \in S$ (m, n 可相同), 则 $3m - 2n \in S$.

3. 求一切正实数 t, 具有下述性质: 存在一个由实数组成的无限集合 X, 使得对任意 $x, y, z \in X$ (这里 x, y, z 可以相同), 以及任意实数 a 与正实数 d, 均有

$$\max\{|x-(a-d)|, |y-a|, |z-(a+d)|\} > td.$$

4. 给定整数 $n \geqslant 2$. 设 n 个非空有限集 $A_1, A_2, \ldots, A_n$ 满足: 对任意 $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, 有 $|A_i \triangle A_j| = |i-j|$. 求 $|A_1| + |A_2| + \cdots + |A_n|$ 的最小值. (这里, $|X|$ 表示有限集 X 的元素个数; 对于集合 X, Y, 规定 $X \triangle Y = \{a : a \in X, a \notin Y\} \cup \{a : a \in Y, a \notin X\}$.)

5. 对正整数 n 及整数 i ($0 \leqslant i \leqslant n$), 设 $\mathrm{C}_n^i \equiv c(n, i) \pmod 2$, 其中 $c(n, i) \in \{0, 1\}$, 并记

$$f(n, q) = \sum_{i=0}^{n} c(n, i) q^i.$$

设 m, n, q 为正整数且 $q+1$ 不是 2 的方幂. 证明: 若 $f(m, q) \mid f(n, q)$, 则对任意正整数 r 有 $f(m, r) \mid f(n, r)$.

证明. 对正整数 n, 设 n 的二进制表示为 $n = 2^{d_1} + 2^{d_2} + \cdots + 2^{d_k}$, 其中 $0 \leqslant d_1 < d_2 < \cdots <$

d_k, 记 $B(n)=\{d_1,d_2,\dots,d_k\}$. 由 Lucas 定理, $c(n,i)=1$ 当且仅当 $B(i)\subseteq B(n)$, 此时

$$f(n,q)=\sum_{A\subseteq B(n)}q^{\sigma(A)}=\prod_{a\in B(n)}(1+q^{2^a}),$$

其中 $\sigma(X)=\sum_{x\in X}2^x$.

对非负整数 $a<b$, 由

$$q^{2^b}-1=\left(q^{2^{b-1}}+1\right)\cdots\left(q^{2^a}+1\right)\left(q^{2^a}-1\right)$$

可知 $q^{2^a}+1\mid q^{2^b}-1$, 于是

$$\gcd\left(q^{2^a}+1,q^{2^b}+1\right)=\gcd\left(q^{2^a}+1,2\right)\mid 2.$$

设 $s(n)$ 为 n 的最大奇约数, 所以 $s\left(q^{2^a}+1\right)$ 与 $s\left(q^{2^b}+1\right)$ 互素.

由 $q+1$ 不是 2 的幂, 于是 $q>1$. 注意到对任意正整数 k, $q^{2^k}+1\equiv 1$ 或 $2 \pmod 4$, 又 $q^{2^k}+1>2$, 于是 $s\left(q^{2^k}+1\right)>1$, 也不是 2 的幂.

综上所述, 由 $f(m,q)\mid f(n,q)$ 可得对任意 $a\in B(m)$, 有

$$s\left(q^{2^a}+1\right)\mid\prod_{b\in B(n)}s\left(q^{2^b}+1\right),$$

所以 $a\in B(n)$, 从而 $B(m)\subseteq B(n)$, 从而对任意 r 都有 $f(m,r)\mid f(n,r)$. □

6. 给定正整数 m,n. 求具有下述性质的最小整数 N ($\geqslant m$): 若一个 N 元整数集含有模 m 的完全剩余系, 则它有一个非空子集, 其元素和被 n 整除.

2013 年中国数学奥林匹克 (十二月)

1. 如图 1.11, 在锐角 $\triangle ABC$ 中, $AB > AC$, $\angle BAC$ 的角平分线与边 BC 交于 D, 点 E, F 分别在边 AB, AC 上, 使得 B, C, F, E 四点共圆. 证明: $\triangle DEF$ 的外接圆圆心与 $\triangle ABC$ 的内切圆圆心重合的充分必要条件是 $BE + CF = BC$.

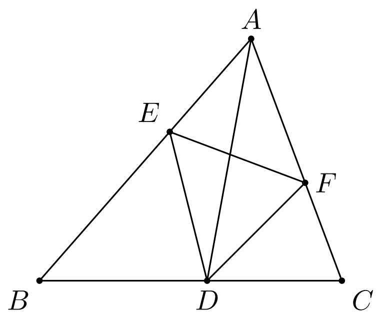

图 1.11

2. 对大于 1 的整数 n, 定义集合

$$D(n) = \{a - b : n = ab,\ a, b \text{ 为正整数},\ a > b\}.$$

证明: 对任意大于 1 的整数 k, 总存在 k 个互不相同且大于 1 的整数 $n_1, n_2, \ldots, n_k$, 使得

$$D(n_1) \cap D(n_2) \cap \cdots \cap D(n_k)$$

的元素个数不小于 2.

3. 证明: 存在唯一的函数 $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ 满足

$$f(1) = f(2) = 1, \quad f(n) = f(f(n-1)) + f(n - f(n-1)), \quad n = 3, 4, \ldots$$

并对每个整数 $m \geqslant 2$, 求 $f(2^m)$ 的值.

4. 对整数 $n > 1$, 设 $n = p_1^{\alpha_1} \cdots p_\ell^{\alpha_\ell}$ 是 n 的标准分解式. 定义

$$\omega(n) = \ell, \quad \Omega(n) = \alpha_1 + \cdots + \alpha_\ell.$$

是否对任意给定的正整数 k 及正整数 α, β, 总存在整数 $n > 1$, 使得

$$\frac{\omega(n+k)}{\omega(n)} > \alpha, \quad \frac{\Omega(n+k)}{\Omega(n)} < \beta?$$

证明你的结论.

5. 设集合 $X = \{1, 2, \ldots, 100\}$, 函数 $f : X \to X$ 同时满足

(1) 对任意 $x \in X$, 都有 $f(x) \neq x$.

(2) 对 X 的任意一个 40 元子集 A, 都有 $A \cup f(A) \neq \varnothing$.

求最小的正整数 k, 使得对任意满足上述条件的函数 f, 都存在 X 的 k 元子集 B, 使得 $B \cup f(B) = X$.

注: 对 X 的子集 T, 定义 $f(T) = \{x : \text{存在 } t \in T, \text{使得 } x = f(t)\}$.

6. 对非空数集 S, T, 定义

$$S + T = \{s + t : s \in S, t \in T\}, \quad 2S = \{s : s \in S\}.$$

设 n 是正整数, A, B 均为 $\{1, 2, \ldots, n\}$ 的非空子集. 证明: 存在 $A + B$ 的子集 D, 使得

$$D + D \subseteq 2(A + B), \quad \text{且 } |D| \geqslant \frac{|A| \cdot |B|}{2n}.$$

2014 年中国数学奥林匹克

1. 给定实数 $r\in(0,1)$, 证明: 若 n 个负数 $z_1,z_2,\dots,z_n$ 满足 $|z_k-1|\leqslant r$ $(k=1,2,\dots,n)$, 则

$$|z_1+z_2+\cdots+z_n|\cdot\left|\frac{1}{z_1}+\frac{1}{z_2}+\cdots+\frac{1}{z_n}\right|\geqslant n^2(1-r^2).$$

2. 如图 1.12, 设 A,B,D,E,F,C 依次是一个圆上的六个点, 满足 $AB=AC$. 直线 AD 与 BE 交于点 P, 直线 AF 与 CE 交于点 R, 直线 BF 与 CD 交于点 Q, 直线 AD 与 BF 交于点 S, 直线 AF 与 CD 交于点 T. 点 K 在线段 ST 上, 使得 $\angle SKQ=\angle ACE$. 求证: $SK/KT=PQ/QR$.

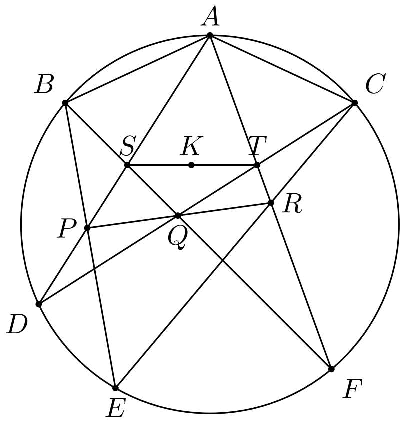

图 1.12

3. 给定整数 $n\geqslant 5$. 求最小的整数 m, 使得存在两个由整数构成的集合 A,B, 同时满足下列条件:

(1) $|A|=n$, $|B|=m$, 且 $A\subseteq B$;

(2) 对 B 中任意两个不同元素 x,y, 有: $x+y\in B$ 当且仅当 $x,y\in A$.

4. 求具有下述性质的所有整数 k: 存在无穷多个正整数 n, 使得 $n+k$ 不整除 C_{2n}^{n}.

5. 某次会议共有 30 人参加, 其中每个人在其余人中至多有 5 个熟人; 任意 5 个人中, 至少有两人不是熟人. 求最大的正整数 k, 使得在满足上述条件的 30 人中总存在 k 个人, 两两不是熟人.

6. 设非负整数的无穷数列 $a_1,a_2,\dots$ 满足: 对任意正整数 m,n, 均有

$$\sum_{i=1}^{2m}a_{in}\leqslant m.$$

证明: 存在正整数 k, d, 满足

$$\sum_{i=1}^{2k} a_{id} = k - 2014.$$

2015 年中国数学奥林匹克

1. 设正整数 $a_1, a_2, \ldots, a_{31}, b_1, b_2, \ldots, b_{31}$ 满足:

(1) $a_1 < a_2 < \cdots < a_{31} \leqslant 2015$, $b_1 < b_2 < \cdots < b_{31} \leqslant 2015$;

(2) $a_1 + a_2 + \cdots + a_{31} = b_1 + b_2 + \cdots + b_{31}$.

求 $S = |a_1 - b_1| + |a_2 - b_2| + \cdots + |a_{31} - b_{31}|$ 的最大值.

2. 凸四边形 $ABCD$ 中, K, L, M, N 分别是边 AB, BC, CD, DA 上的点, 满足

$$\frac{AK}{KB} = \frac{DA}{BC}, \quad \frac{BL}{LC} = \frac{AB}{CD}, \quad \frac{CM}{MD} = \frac{BC}{DA}, \quad \frac{DN}{NA} = \frac{CD}{AB}.$$

延长 AB, DC 交于点 E, 延长 AD, BC 交于点 F. 设 $\triangle AEF$ 的内切圆在边 AE, AF 上的切点分别为 S, T; 设 $\triangle CEF$ 的内切圆在边 CE, CF 上的切点分别为 U, V. 证明: 若 K, L, M, N 四点共圆, 则 S, T, U, V 四点共圆.

3. 设 p 是奇素数, $a_1, a_2, \ldots, a_p$ 是整数. 证明以下两个命题等价:

(1) 存在一个次数不超过 $\dfrac{p-1}{2}$ 的整系数多项式 $f(x)$, 使得对每个不超过 p 的正整数 i, 均有 $f(i) \equiv a_i \pmod{p}$.

(2) 对每个不超过 $\dfrac{p-1}{2}$ 的正整数 d, 均有

$$\sum_{i=1}^{p} (a_{i+d} - a_i)^2 \equiv 0 \pmod{p},$$

这里下标按模 p 理解, 即 $a_{p+n} = a_n$.

4. 设整数 $n \geqslant 3$, 不超过 n 的素数共有 k 个. 设 A 为集合 $\{2, 3, \ldots, n\}$ 的子集, A 的元素个数小于 k, 且 A 中任意一个数都不是另一个数的倍数. 证明: 存在集合 $\{2, 3, \ldots, n\}$ 的 k 元子集 B, 使得 B 中任意一个数也不是另一个数的倍数, 且 B 包含 A.

5. 在平面中, 对任意给定的凸四边形 $ABCD$, 证明: 存在正方形 $A'B'C'D'$ (其顶点可以按顺时针或逆时针标记), 使得点 $A' \neq A$, $B' \neq B$, $C' \neq C$, $D' \neq D$, 且直线 AA', BB', CC', DD' 经过同一个点.

6. 一项赛事共有 100 位选手参加, 对任意两位选手 x, y 他们之间恰比赛一次且分出胜负, 以 $x \to y$ 表示选手 x 战胜选手 y. 如果对任意两位选手 x, y, 均能找到某个选手序列 $u_1, u_2, \ldots, u_k$ $(k \geqslant 2)$, 使得 $x = u_1 \to u_2 \to \cdots \to u_k = y$, 则称该赛事结果是“友好”的.

(1) 证明: 对任意一个友好的赛事结果, 存在正整数 m 满足如下条件:
对任意两位选手 x, y, 均能找到某个长度为 m 的选手序列 $z_2, z_2, \ldots, z_m$ (这里 $z_1, z_2, \ldots, z_m$ 可以有重复), 使得 $x = z_1 \to z_2 \to \cdots \to z_m = y$.

(2) 对任意一个友好的赛事结果 T, 将符合 (1) 中条件的最小正整数 m 记为 $m(T)$. 求 $m(T)$ 的最小值.

2016 年中国数学奥林匹克

1. 数列 $\{u_n\},\{v_n\}$ 满足:

$$u_0=u_1=1,\qquad u_n=2u_{n-1}-3u_{n-2}\quad (n\geqslant 2);$$
$$u_0=a,\quad v_1=b,\quad v_2=c,\qquad v_n=v_{n-1}-3v_{n-2}+27v_{n-3}\quad (n\geqslant 3).$$

假设存在正整数 N, 使得当 $n\geqslant N$ 时, v_n 均是整数并且可被 u_n 整除. 证明: $3a=2b+c$.

2. 如图 1.13, 锐角 $\triangle ABC$ 中, $AB>AC$, $\odot O$ 和 $\odot I$ 分别是 $\triangle ABC$ 的外接圆和内切圆, $\odot I$ 与边 BC 相切于点 D, 直线 AO 与边 BC 相交于点 X, AY 是边 BC 上的高, $\odot O$ 在点 B,C 处的切线相交于点 L, PQ 是过点 I 的 $\odot O$ 的直径. 求证: A,D,L 三点共线当且仅当 P,X,Y,Q 四点共圆.

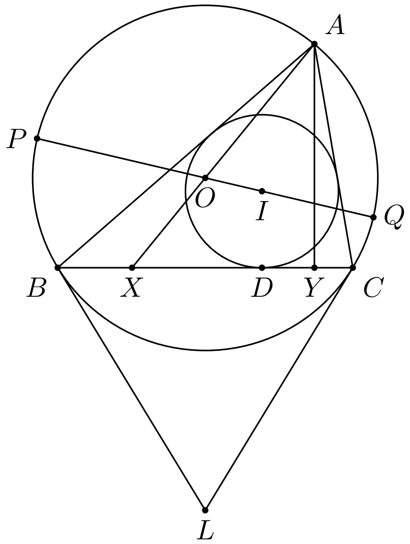

图 1.13

3. 矩形 R 被分割成 2016 个小矩形, 每个小矩形的边都平行于 R 的边, 小矩形的顶点称为结点. 一条在小矩形边上的线段, 若其两个端点都是结点, 并且其内部不含其他结点, 则称这条线段为基本线段. 考虑所有分割方式, 求基本线段条数的最大值和最小值.

例如, 在图 1.14 中, 矩形 R 被分割成 5 个小矩形, 共有 16 条基本线段. 线段 AB 和 BC 是基本线段, 线段 AC 不是基本线段.

4. 设整数 $n\geqslant 2$. 对于 $1,2,\ldots,n$ 的任意两个排列 $\alpha=(a_1,a_2,\ldots,a_n)$ 和 $\beta=(b_1,b_2,\ldots,b_n)$, 若存在正整数 $k\leqslant n$ 使得

$$b_i=\begin{cases}a_{k+1-i}, & 1\leqslant i\leqslant k,\\ a_i, & k<i\leqslant n,\end{cases}$$

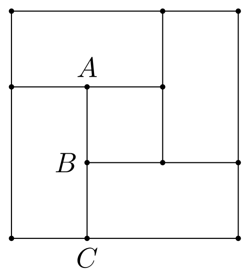

图 1.14

则称 α 和 β 互为翻转.

证明: 可以把 $1, 2, \ldots, n$ 的所有排列适当记为 $P_1, P_2, \ldots, P_m$, 使得对于每个 $i = 1, 2, \ldots, m$, P_i 和 P_{i+1} 互为翻转. 这里 $m = n!$, 并规定 $P_{m+1} = P_1$.

5. 用 D_n 表示正整数 n 的所有正因数构成的集合. 求所有的正整数 n, 使得 D_n 可以写成两个不相交的子集 A 和 G 的并, 且满足: A 和 G 均含有至少三个元素, A 中的元素可以排列成一个等差数列, G 中的元素可以排列成一个等比数列.

6. 给定整数 $n \geqslant 2$, 以及正数 $a < b$. 设实数 $x_1, x_2, \ldots, x_n \in [a, b]$, 求

$$\frac{\dfrac{x_1^2}{x_2} + \dfrac{x_2^2}{x_3} + \cdots + \dfrac{x_{n-1}^2}{x_n} + \dfrac{x_n^2}{x_1}}{x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1} + x_n}$$

的最大值.

2017 年中国数学奥林匹克

1. 对正整数 n, 定义 A_n 是具有如下性质的所有素数 p 构成的集合: 存在正整数 a,b, 使得 $\dfrac{a+b}{p}$ 与 $\dfrac{a^n+b^n}{p^2}$ 都是与 p 互素的整数. 当 A_n 为有限集 (包括空集) 时, 用 $f(n)$ 表示 A_n 的元素个数.

(1) 证明: A_n 为有限集的充分必要条件是 $n \neq 2$;

(2) 若 k,m 为正奇数, d 是 k,m 的最大公约数, 则

$$f(d) \leqslant f(k)+f(m)-f(km) \leqslant 2f(d).$$

2. 设 n,k 为正整数,

$$T=\{(x,y,z): x,y,z \in \mathbb{Z},\ 1 \leqslant x,y,z \leqslant n\}$$

为空间直角坐标系中 n^3 个整点构成的集合. 已知 T 中 $(3n^2-3n+1)+k$ 个点染成红色, 满足如下条件: 如果 T 中两点 P,Q 都被染成红色且 PQ 平行于坐标轴, 那么线段 PQ 上所有整点也都被染成红色. 证明: 存在至少 k 个互不相同的立方体, 它们的边长为 1 且每个顶点都被染成红色.

3. 设正整数 q 不是完全立方数. 证明: 存在正实数 c, 使得

$$\left\{nq^{1/3}\right\}+\left\{nq^{2/3}\right\} \geqslant cn^{-1/2}$$

对任意正整数 n 都成立, 其中 $\{x\}$ 表示实数 x 的小数部分.

4. 如图 1.15, 圆内接四边形 $ABCD$ 的对角线交于点 P, $\triangle APD$ 的外接圆与线段 AB 交于 A,E 两点, $\triangle BPC$ 的外接圆与线段 AB 交于 B,F 两点, I 和 J 分别是 $\triangle ADE$ 和 $\triangle BCF$ 的内心, 线段 IJ 与 AC 交于点 K. 证明: A,I,K,E 四点共圆.

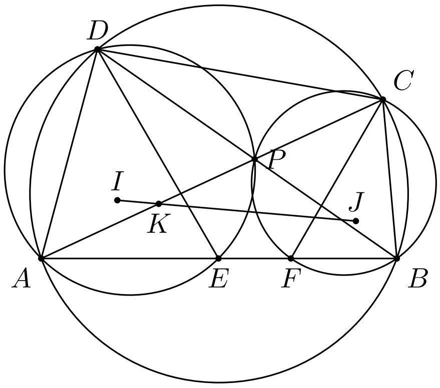

图 1.15

5. 给定奇数 $n \geqslant 3$, 用黑白两种颜色对 $n \times n$ 方格表的每个方格染色. 具有相同颜色并且有公共顶点的两个方格关系称为相邻. 对于任意两个方格 a, b, 若存在一系列方格 $c_1, c_2, \ldots, c_k$ 使得 $c_1 = a$, $c_k = b$, c_i 与 c_{i+1} 相邻, $i = 1, 2, \ldots, k-1$, 则称 a 与 b 连通. 求最大的正整数 M, 使得存在一种染色方案, 其中有 M 个两两不连通的方格.

6. 已知 n, k 为正整数, $n > k$. 给定实数 $a_1, a_2, \ldots, a_n \in (k-1, k)$. 设正实数 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ 满足对 $\{1, 2, \ldots, n\}$ 的任意 k 元子集 I, 都有

$$\sum_{i \in I} x_i \leqslant \sum_{i \in I} a_i.$$

求 $x_1 x_2 \cdots x_n$ 的最大值.

2018 年中国数学奥林匹克

1. 设实数 $a,b,c,d,e \geqslant -1$, 且 $a+b+c+d+e=5$. 求

$$S=(a+b)(b+c)(c+d)(d+e)(e+a)$$

的最小值和最大值.

2. 若一个三元正整数集合有某个直角三角形的三边长构成, 则称其为“勾股三元集”, 例如, $\{6,8,10\}$ 为一个勾股三元集. 设 P,Q 为任意两个勾股三元集. 证明: 存在整数 $m \geqslant 2$ 及 m 个勾股三元集 $P_1,P_2,\ldots,P_m$ 满足 $P_1=P$, $P_m=Q$, 且对 $1 \leqslant i \leqslant m-1$, 均有 $P_i \cap P_{i+1} \neq \varnothing$.

3. 如图 1.16 所示, $\triangle ABC$ 内接于 $\odot O$, 且 $AB<AC$. 点 D 在 $\angle BAC$ 的平分线上, 点 E 在边 BC 上, 使得 $OE \parallel AD$, $DE \perp BC$. 点 K 在 EB 的延长线上, 使得 $EA=EK$. 过 A,K,D 三点的圆与 BC 的延长线于点 P, 交 $\odot O$ 于 A 及另一点 Q. 证明: 直线 PQ 与 $\odot O$ 相切.

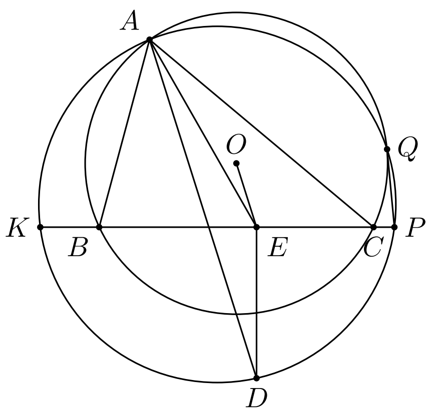

图 1.16

4. 已知图 1.17 的几何图形是一个长、短轴长度不同的椭圆.

(1) 证明: 这个椭圆的面积最小的外切菱形是唯一的;

(2) 请写出用尺规作图的方法作出这个菱形的过程.

5. 给定正整数 n, 在 $n \times n$ 方格表中的每个小方格内填一个整数. 对这个方格表进行如下操作: 选取一个小方格, 将这个小方格所在的行与列中的 $2n-1$ 个方格内的每个数各加 1.

求最大整数 $N=N(n)$, 使得无论初始时方格表中的数是多少, 总可以经过一系列上述操作, 使得方格表中至少有 N 个偶数.

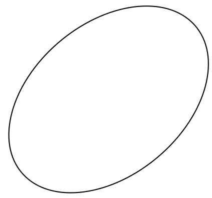

图 1.17

6. 将 2018 个点 $P_1, P_2, \ldots, P_{2018}$ (点的位置可以相同) 放置在一个给定的正五边形的内部或边界上. 求所有放置方式, 使得

$$S = \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant 2018} |P_iP_j|^2$$

达到最大, 并证明你的结论.

2019 年中国数学奥林匹克

1. 实数 $a_1, a_2, \ldots, a_{40}$ 满足 $a_1 + a_2 + \cdots + a_{40} = 0$, 且对 $1 \leqslant i \leqslant 40$, 均有 $|a_i| - |a_{i+1}| \leqslant 1$, 这里 $a_{41} = a_1$. 求记 $a = a_{10}$, $b = a_{20}$, $c = a_{30}$, $d = a_{40}$.

(1) 求 $a + b + c + d$ 的最大值;

(2) 求 $ab + cd$ 的最大值.

2. 如图 1.18, 在 $\triangle ABC$ 中, $AB > AC$, $\angle BAC$ 的平分线与边 BC 交于点 D. P 为线段 DA 延长线上一点, PQ 与 $\triangle ABD$ 的外接圆相切于点 Q (Q, B 在直线 AD 同侧), PR 与 $\triangle ACD$ 的外接圆相切于点 R (R, C 在直线 AD 同侧). 线段 BR, CQ 交于点 K, 过点 K 作 BC 的平行线, 分别于 QD, AD, RD 相交于点 E, L, F. 证明: $EL = FK$.

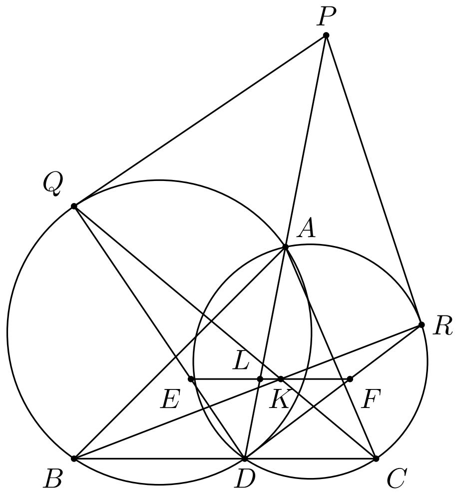

图 1.18

3. 设 S 是一个 35 元集合, F 是由一些 S 到自身的映射构成的集合. 对于正整数 k, 称 F 具有性质 $P(k)$, 如果对于任意 $x, y \in S$, 均存在 F 中的 k 个映射 $f_1, f_2, \ldots, f_k$ (可以相同), 使得

$$f_k(\cdots(f_2(f_1(x)))\cdots) = f_k(\cdots(f_2(f_1(y)))\cdots).$$

求最小正整数 m, 使得所有具有性质 $P(2019)$ 的 F 都具有性质 $P(m)$.

4. 求最大实数 c, 使得下述结论对于所有的整数 $n \geqslant 3$ 成立: 设 $A_1, A_2, \ldots, A_n$ 是圆周上的 n 条弧 (每条弧都包含自身的端点), 若存在至少 $\dfrac{1}{2}\mathrm{C}_n^3$ 个三元组 (i, j, k), 满足 $1 \leqslant i < j < k \leqslant n$ 且 $A_i \cap A_j \cap A_k \neq \varnothing$, 则存在 $I \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$, 满足 $|I| > cn$, 且 $\bigcap\limits_{i \in I} A_i \neq \varnothing$.

5. 数列 $\{a_n\}_{n \geqslant 1}$ 定义如下: a_1 为大于 1 的整数, 对 $n \geqslant 1$, $a_{n+1} = a_n + P(a_n)$, 其中 $P(a_n)$ 表示 a_n 的最大素因子. 证明: 数列 $\{a_n\}_{n \geqslant 1}$ 中有完全平方数.

6. 是否存在正实数 $a_0, a_1, \ldots, a_{19}$ 同时满足以下两个条件？请证明你的结论.

(1) 多项式 $P(x) = x^{20} + a_{19}x^{19} + \cdots + a_1 x + a_0$ 无实根;

(2) 对于任意的整数 $0 \leqslant i < j \leqslant 19$, 交换 $P(x)$ 中的 x^i 和 x^j 的系数所得的多项式均有实根.

2020 年中国数学奥林匹克

1. 设数列 $\{z_n\}$ $(n \geqslant 1)$ 的奇数项均为实数, 偶数项均为纯虚数, 且对于任意的正整数 k, 有 $|z_k z_{k+1}| = 2^k$. 对正整数 n, 记 $f_n = |z_1 + z_2 + \cdots + z_n|$.

(1) 求 f_{2020} 的最小可能值;

(2) 求 $f_{2020} f_{2021}$ 的最小可能值;

2. 给定整数 $m > 1$. 求最小正整数 n, 使得对任意整数 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ 和 $b_1, b_2, \ldots, b_n$, 存在整数 $x_1, x_2, \ldots, x_n$, 满足下列两个条件:

(1) $x_1, x_2, \ldots, x_n$ 中至少有一个于 m 互素;

(2) $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i x_i \equiv \sum\limits_{i=1}^{n} b_i x_i \equiv 0 \pmod{m}$.

3. 设正整数 n 恰能被 36 个不同的素数整除. 对 $k = 1, 2, \ldots, 5$, 设 c_k 为区间 $\left[\dfrac{(k-1)n}{5}, \dfrac{kn}{5}\right]$ 中与 n 互素的整数个数. 已知 $c_1, c_2, \ldots, c_5$ 不全相等. 证明:

$$\sum_{1 \leqslant i < j \leqslant 5} (c_i - c_j)^2 \geqslant 2^{36}.$$

4. 如图 1.19, 锐角 $\triangle ABC$ 内接于圆 ω, $AB > AC$, M 为圆 ω 的劣弧 $\overset{\frown}{BC}$ 的中点, K 为圆 ω 上点 A 的对径点. 过圆 ω 的圆心 O 作 AM 的平行线, 交线段 AB 于点 D, 交 CA 的延长线于点 E. 设直线 BM 与 CK 交于点 P, 直线 CM 与 BK 交于点 Q.

求证: $\angle OEB + \angle OPB = \angle ODC + \angle OQC$.

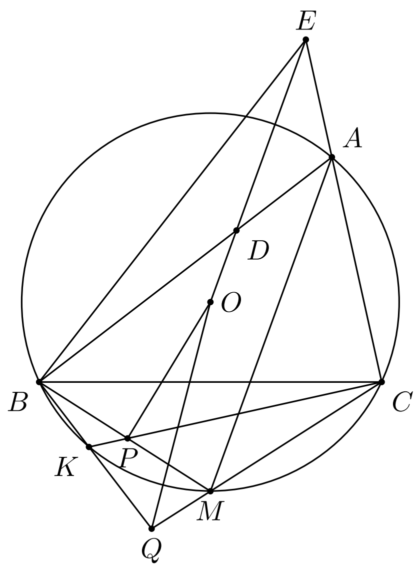

图 1.19

5. 我们考虑一个具有下述性质的凸多面体 P:

(1) P 的每个顶点都恰属于三个面;

(2) 对于任意整数 $k \geqslant 3$, P 的 k 边形面的个数均为偶数.

已知蚂蚁从某条棱的中点出发, 在 P 的额表面沿着一条由棱组成的封闭道路 L 爬行, L 上的每一点都恰经过一次, 最终回到出发点.

已知 L 将 P 的表面分成两个区域, 且对于任意的 k, 两个区域中 k 边形面的个数均相等.

求证: 在上述爬行过程中, 蚂蚁在 P 的顶点处向左转的次数和向右转的次数相同.

6. 记 $\mathbb{N}_+$ 为全体正整数的集合. 求所有函数 $f: \mathbb{N}_+ \to \mathbb{N}_+$, 满足对于任意的 $x, y \in \mathbb{N}_+$, 均有 $f(f(x)+y)$ 整除 $x+f(y)$.

2021 年全国中学生数学奥林匹克竞赛

1. 给定正数 a, b 和平面上的一条长度为 a 的线段 AB. 设此平面上的两个动点 C, D 满足四边形 $ABCD$ 是一个非退化的凸四边形, 且 $BC = CD = b$, $DA = a$. 已知存在圆 I 与四边形 $ABCD$ 的四边都相切. 求圆心 I 的轨迹.

解. 注意到 $ABCD$ 是轴对称图形, 于是点 I 在对称轴 AC 上, 且 $AI/CI = AB/BC = a/b$. 过点 I 作直线 $OI \parallel BC$ 交 AB 于点 O, 于是 $\triangle AOI$ 与 $\triangle ABC$ 位似, 位似比为 $AI/AC = a/(a+b)$, 从而 $AO = a^2/(a+b)$. 由于点 C 在以 B 为圆心, b 为半径的圆 Ω 上, 所以点 I 在以 O 为圆心, $ab/(a+b)$ 为半径的圆 ω 上.

注意到四边形 $ABCD$ 为凸四边形当且仅当 $\angle BAC$ 和 $\angle BCA$ 是锐角, 对 a 与 b 的大小关系分类讨论:

- 当 $a > b$ 时, $AB/\sin\angle BCA = BC/\sin\angle BAC$, 于是
$$\sin\angle BAC = \frac{b}{a}\sin\angle BCA \in \left(0, \frac{b}{a}\right).$$
于是点 I 的轨迹是 ω 上的两段圆弧, 满足 $\angle IAB \in (0, \arcsin(b/a))$, 即 $\angle AOI \in (\arccos(b/a), \pi)$.
- 当 $a = b$ 时, ω 是以 AB 为直径的圆, 点 I 的轨迹是 AB 为直径的圆去除 A, B 两点.
- 当 $a < b$ 时, $AB/\sin\angle BCA = BC/\sin\angle BAC$, 于是
$$\sin\angle BCA = \frac{a}{b}\sin\angle BAC \in \left(0, \frac{a}{b}\right).$$
于是点 I 的轨迹是 ω 上的两段圆弧, 满足 $\angle ICB \in (0, \arcsin(a/b))$, 即 $\angle AOI \in (\arccos(a/b), \pi)$.

□

2. 求满足下述条件的最大实数 λ: 对于任意正实数 p, q, r, s, 都存在复数 $z = a + b\mathrm{i}$ $(a, b \in \mathbb{R})$, 使得 $|b| \geqslant \lambda|a|$, 且
$$(pz^3 + 2qz^2 + 2rz + s)(qz^3 + 2pz^2 + 2sz + r) = 0.$$

3. 求所有整数 a, 使得存在 6 元整数集合 X 满足下述条件: 对每个 $k = 1, 2, \ldots, 36$, 均存在 $x, y \in X$, 使得 $ax + y - k$ 可被 37 整除.

4. 设 n $(n \geqslant 3)$ 名科学家参加会议, 每位科学家都有一些朋友参会 (朋友关系是相互的, 且每个人不是自己的朋友). 已知无论怎样将这些科学家分成非空的两组, 总存在同组的两位科学家是朋友, 也存在不同组的两位科学家是朋友. 第一天, 会议提出了一项议题, 每位科学家对此议题的赞成度可用一个非负整数表示. 从第二天起的每一天, 每位科学家的赞成度变为其所有朋友前一天的赞成度的平均值的整数部分. 证明: 经过若干天之后, 所有科学家的赞成度都相等.

5. 我们知道, 在尺规作图中, 出现的一维几何对象只有两种: 圆周和直线. 设一张纸上仅标记了距离为 1 的两个点. 证明: 可以在这张纸上用尺规作出一条直线及该直线上距离为 $\sqrt{2021}$ 的两个点, 使得作图过程中出现的不同圆周和直线的总数不超过 10 个.

注: 解答中应有明确的作图步骤, 并对出现的圆周和直线依次编号.

6. 对于整数 $0 \leqslant a \leqslant n$, 记 $f(n,a)$ 为 $(x+1)^a(x+2)^{n-a}$ 的展开式中被 3 整除的系数的个数. 例如,

$$(x+1)^3(x+2) = x^4 + 5x^3 + 9x^2 + 7x + 2,$$

故 $f(4,3)=1$. 对于正整数 n, 定义 $F(n)$ 为 $f(n,0), f(n,1), \ldots, f(n,n)$ 中的最小数. 证明:

(1) 存在无穷多个正整数 n, 使得 $F(n) \geqslant \dfrac{n-1}{3}$;

(2) 对于任意正整数 n, 均有 $F(n) \leqslant \dfrac{n-1}{3}$.

2022 年全国中学生数学奥林匹克竞赛

1. 设正实数序列 $\{a_n\},\{b_n\}$ 满足:

$$a_{n+1}=a_n-\frac{1}{1+\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}},\quad b_{n+1}=b_n+\frac{1}{1+\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{b_i}}.$$

(1) 若 $a_{100}b_{100}=a_{101}b_{101}$, 求 a_1-b_1 的值.

(2) 若 $a_{100}=b_{99}$, 比较 $a_{100}+b_{100}$ 与 $a_{101}+b_{101}$ 的大小.

2. 给定一个边长为 1 的正三角形, 称 $(\triangle DEF,\triangle XYZ)$ 为一个好三角形对, 如果 D,E,F 分别在 BC,CA,AB 内部, 点 X,Y,Z 分别在直线 BC,CA,AB 上, 满足

$$\frac{DE}{20}=\frac{EF}{22}=\frac{FD}{38},\quad 且\ XY\perp DE,\ YZ\perp EF,\ ZX\perp FD.$$

当 $(\triangle DEF,\triangle XYZ)$ 取遍所有好三角形对时, 求

$$\frac{1}{S_{\triangle DEF}}+\frac{1}{S_{\triangle XYZ}}$$

的所有可能值.

3. 给定正整数 m 和 n. 将正 $2m+2n$ 边形的 $2m$ 个顶点染黑色, 其余 $2n$ 个顶点染白色. 定义两个黑点 B,C 的染色距离 $d(B,C)$ 为直线 BC 两侧的白点数目的较小者; 定义两个白点 W,X 的染色距离 $d(W,X)$ 为直线 WX 两侧的黑点数目的较小者.

一个黑色配对方案 $\mathcal{B}$ 是指将所有 $2m$ 个黑点标记为 $B_1,\dots,B_m,C_1,\dots,C_m$, 使得 m 条线段 B_iC_i $(1\leqslant i\leqslant m)$ 两两不相交. 对任一黑色配对方案 $\mathcal{B}$, 记

$$P(\mathcal{B})=\sum_{i=1}^{m}d(B_i,C_i).$$

一个白色配对方案 $\mathcal{W}$ 是指将所有 $2m$ 个白点标记为 $W_1,\dots,W_m,X_1,\dots,X_m$, 使得 m 条线段 W_iX_i $(1\leqslant i\leqslant m)$ 两两不相交. 对任一白色配对方案 $\mathcal{W}$, 记

$$P(\mathcal{W})=\sum_{i=1}^{m}d(W_i,X_i).$$

证明: 无论顶点的染色方式如何, 均有

$$\max_{\mathcal{B}}P(\mathcal{B})=\max_{\mathcal{W}}P(\mathcal{W}),$$

其中等式两边的最大值分别在所以可能黑色配对方案 $\mathcal{B}$ 和白色配对方案 $\mathcal{W}$ 中选取.

4. 求最小的整数 $n\geqslant 3$, 满足: 平面上存在 n 个点 $A_1,A_2,\dots,A_n$, 其中任意三点不共线, 且对任意 $1\leqslant i\leqslant n$, 存在 $1\leqslant j\leqslant n$ $(j\neq i)$, 使得线段 A_jA_{j+1} 经过线段 A_iA_{i+1} 的中点. 这里 $A_{n+1}=A_1$.

5. 证明存在正数 C, 使得如下结论成立.

对任意一个无穷多项的正整数等差数列 $a_1, a_2, a_3, \ldots$, 若 a_1 和 a_2 的最大公约数无平方因子, 则存在正整数 $m \leqslant C \cdot a_2^2$, 使得 a_m 无平方因子.

注: 称正整数 N 无平方因子, 若它不能被任何大于 1 的平方数整除.

6. 有 n ($n \geqslant 8$) 座机场, 某些机场之间有单向直达航线. 对任意两座机场 a, b, 从 a 飞往 b 的单向直达航线至多只有一条 (可能同时有 a 飞往 b 的和从 b 飞往 a 的单向直达航线). 已知对任意由若干座机场构成的集合 A ($1 \leqslant |A| \leqslant n-1$), 都有至少 $4 \cdot \min\{|A|, n-|A|\}$ 条单向直达航线从 A 中的机场飞往 A 之外的机场.

证明: 对任意一座机场 x, 都可以从 x 出发, 经过不超过 $\sqrt{2n}$ 条单向直达航线回到机场 x.

第二章　中国国家队选拔考试

2009 年中国国家队选拔考试

1. 圆 Γ 与圆 ω 内切于点 S, 圆 Γ 的弦 AB 与圆 ω 相切于点 T, 设圆 ω 的圆心为 O, P 为直线 AO 上一点. 求证: $PB\perp AB$ 的充分必要条件是 $PS\perp TS$.

2. 设 n,k 是给定的正整数, $k\leqslant 2n-1$. 现有 $2n$ 名乒乓球选手进行比赛. 他们共打了 k 轮比赛. 每轮都是分成 n 个组, 每组两人进行比赛. 两名选手在不同的轮中可以交手多次. 求最大的正整数 $m=f(n,k)$, 使得无论比赛过程如何, 最后一定能找到 m 名选手, 他们两两之间没有进行过比赛.

3. 已知 $x_1,x_2,\ldots,x_m,y_1,y_2,\ldots,y_n$ 是正实数, 记 $X=\sum\limits_{i=1}^{m}x_i$, $Y=\sum\limits_{j=1}^{n}y_j$. 求证:

$$2XY\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}|x_i-y_j|\geqslant X^2\sum_{j=1}^{n}\sum_{\ell=1}^{n}|y_j-y_\ell|+Y^2\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{m}|x_i-x_k|.$$

4. 凸五边形 $ABCDE$ 中, AD 与 BE 相交于 F, BE 与 CA 相交于 G, CA 与 DB 相交于 H, DB 与 EC 相交于 I, EC 与 AD 相交于 J. 设 A',B',C',D',E' 分别为 AI 与 BE, BJ 与 CA, CF 与 DB, DG 与 EC, EH 与 AD 的交点, 求证:

$$\frac{AB'}{B'C}\cdot\frac{CD'}{D'E}\cdot\frac{EA'}{A'B}\cdot\frac{BC'}{C'D}\cdot\frac{DE'}{E'A}=1.$$

5. 求所有满足 $ab(a-b)\neq 0$ 的整数对 (a,b), 使得存在整数集 $\mathbb{Z}$ 的一个子集 Z_0, 对于任意整数 n, 三个数 $n,n+a,n+b$ 恰好有一个在 Z_0 中.

6. 函数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 满足: 对任意互不相同且满足 $\dfrac{a-b}{b-c}+\dfrac{a-d}{d-c}=0$ 的实数 a,b,c,d, 都有 $f(a),f(b),f(c),f(d)$ 互不相同, 且

$$\frac{f(a)-f(b)}{f(b)-f(c)}+\frac{f(a)-f(d)}{f(d)-f(c)}=0.$$

求证: f 为线性函数.

7. α,β 是实数, $1<\alpha<\beta$. 求具有下述性质的最大正整数 r: 将每个正整数任意染上 r 中颜色之一, 则总存在两个同色的正整数 x,y, 满足 $\alpha\leqslant x/y\leqslant\beta$.

8. 在凸四边形 $ABCD$ 中, $\angle DCA$ 与 $\angle CDB$ 的外角平分线分别是边 CB 与 DA, E,F 分别为 AC,BD 延长线上的点, 且 C,E,F,D 四点共圆. 平面上的一点 P 使得 DA 是 $\angle PDE$ 的外角平分线, CB 是 $\angle PCF$ 的外角平分线. 边 AD 与 BC 所在直线交于点 Q. 求证: 点 P 在边 AB 上的充分必要条件是点 Q 在线段 EF 上.

注. C,E,F,D 不在一个圆上时结论仍成立.

9. 设 $f(x)$ 是系数均为 ±1 的 n 次多项式, 且以 $x=1$ 为 m 重根. 若 $m\geqslant 2^k$ $(k\geqslant 2$, $k\in\mathbb{N})$, 求证: $n\equiv -1 \pmod{2^{k+1}}$.

10. 设 D, E 分别为 $\triangle ABC$ 的边 AB, BC 上的点, P 是三角形 ABC 内一点, 使得 $PE = PC$, 且 $\triangle DEP \sim \triangle PCA$. 求证: BP 是 $\triangle PAD$ 的外接圆的切线.

11. 求所有的整数 $n \geqslant 2$, 具有下述性质: 对任意 k 个模 n 互不同余的整数 $a_1, a_2, \dots, a_k$, 存在一个整系数多项式 $f(x)$, 使同余方程 $f(x) \equiv 0 \pmod{n}$ 恰有 k 个解

$$x \equiv a_1, a_2, \dots, a_k \pmod{n}.$$

12. 设 X 是一个有 $2k$ 个元素的集合, F 是 X 的某些 k 元子集构成的子集族, 使得 X 的任意 $k-1$ 元子集都恰好包含在 F 的一个元素中. 求证: $k+1$ 是一个素数.

13. 设 n 是一个合数. 证明存在正整数 m, 满足 $m \mid n$, $m \leqslant \sqrt{n}$, 且 $d(n) \leqslant d^3(m)$. 这里 $d(k)$ 表示正整数 k 的正约数的个数.

14. 在锐角 $\triangle ABC$ 中, 点 P, Q 分别是边 AB 和 AC 上的点. $\triangle ABC$ 的外接圆和 $\triangle APQ$ 的外接圆交于异于点 A 的另一点 X. 点 Y 是 X 关于直线 PQ 的对称点. 已知 $PX > PB$, 求证: $\triangle XPQ$ 的面积大于 $\triangle YBC$ 的面积.

15. 非负实数 a_1, a_2, a_3, a_4 满足 $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 1$. 求证:

$$\max\left\{\sum_{i=1}^{4}\sqrt{a_i^2 + a_i a_{i-1} + a_{i-1}^2 + a_{i-1}a_{i-2}}, \sum_{i=1}^{4}\sqrt{a_i^2 + a_i a_{i+1} + a_{i+1}^2 + a_{i+1}a_{i+1}}\right\} \geqslant 2,$$

其中 $a_{i+4} = a_i$ 对所有整数 i 成立.

16. 设 $a > b > 1$, b 为奇数, n 为正整数. 若 $b^n \mid a^n - 1$, 求证: $a^b > \dfrac{3^n}{n}$.

17. 求所有复系数多项式 $P(x)$, 使对任意和不为 0 的三个整数 a, b, c, $\dfrac{P(a)+P(b)+P(c)}{a+b+c}$ 均为整数.

18. 设正整数数列 $\{a_n\}$, $n \geqslant 1$ 满足 $\gcd(a_m, a_n) = a_{\gcd(m,n)}$ (对所有 $m, n \in \mathbb{N}^*$). 求证: 对任意的 $n \in \mathbb{N}^*$, $\prod\limits_{d|n} a_d^{\mu(n/d)}$ 是一个整数, 这里 $d \mid n$ 表示 d 遍历 n 的所有正约数, 而函数 $\mu(n)$ 定义为: $\mu(1) = 1$; $\mu(0) = 0$, 若 n 被某个素数的平方整除; $\mu(n) = (-1)^k$, 若 n 为 k 个不同素数之积.

19. 设 D 是三角形 ABC 的 BC 边上一点, 满足 $\angle CAD = \angle CBA$. 圆 O 经过 B, D 两点, 并分别于线段 AB, AD 交于 E, F 两点, BF, DE 相交于点 G. M 是 AG 的中点.

求证: $CM \perp AO$.

20. 给定整数 $n \geqslant 2$, 求具有下述性质的最大常数 $\lambda(n)$: 若实数序列 $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ 满足

$$0 = a_0 \leqslant a_1 \leqslant a_2 \leqslant \cdots \leqslant a_n,$$

及

$$a_i \geqslant \frac{1}{2}(a_{i+1} + a_{i-1}), \quad i = 1, 2, \dots, n-1,$$

则有

$$\left(\sum_{i=1}^{n} i a_i\right)^2 \geqslant \lambda(n) \sum_{i=1}^{n} a_i^2.$$

21. 求证: 对于任意的奇素数 p, 满足 $p \mid n!+1$ 的正整数 n 的个数不超过 $cp^{2/3}$, 这里 c 是一个与 p 无关的常数.

22. 设正实数 a, b 满足 $b-a>2$. 求证: 对区间 $[a, b)$ 中任意两个不同的整数 m, n, 在区间 $[ab, (a+1)(b+1))$ 中存在某些整数组成的非空集合 S, 使得 $\dfrac{\prod\limits_{x \in S} x}{mn}$ 是一个有理数的平方.

23. 设 m 是大于 1 的整数, n 是一个奇数且 $3 \leqslant n < 2m$. 数 $a_{i,j}$ $(i, j \in \mathbb{N},\ 1 \leqslant i \leqslant m,\ 1 \leqslant j \leqslant n)$ 满足:

(1) 对于任意的 $1 \leqslant j \leqslant n$, $a_{1,j}, a_{2,j}, \ldots, a_{m,j}$ 是 $1, 2, \ldots, m$ 的一个排列;

(2) 对于任意的 $1 \leqslant i \leqslant m$, $1 \leqslant j \leqslant n-1$, 有 $|a_{i,j} - a_{i,j+1}| \leqslant 1$.

求 $M = \max\limits_{i \leqslant i \leqslant m} \sum\limits_{j=1}^{n} a_{i,j}$ 的最小值.

24. 求证: 在 40 个不同的正整数所组成的等差数列中, 至少有一项不能表示成 $2^k + 3^\ell$ 的形式, 其中 k, ℓ 是非负整数.

2021 年中国国家队选拔考试

1. 设 m,n 是正整数, 非负实数 $a_{i,j}$ $(1\leqslant i\leqslant m,\ 1\leqslant j\leqslant n)$ 满足对于任何 i,j 都有

$$a_{i,1}\geqslant a_{i,2}\geqslant\cdots\geqslant a_{i,n},\quad a_{i,j}\geqslant a_{2,j}\geqslant\cdots\geqslant a_{m,j}.$$

对 $i=1,2,\ldots,m$ 和 $j=1,2,\ldots,n$ 定义

$$X_{i,j}=a_{1,j}+\cdots+a_{i-1,j}+a_{i,j}+a_{i,j-1}+\cdots+a_{i,1},$$
$$Y_{i,j}=a_{m,j}+\cdots+a_{i+1,j}+a_{i,j}+a_{i,j+1}+\cdots+a_{i,n}.$$

证明:

$$\prod_{i=1}^{m}\prod_{j=1}^{n}X_{i,j}\geqslant\prod_{i=1}^{m}\prod_{j=1}^{n}Y_{i,j}.$$

2. 给定正整数 n,k 满足 $n>k^2>4$. 在一个 $n\times n$ 的方格表中, 两两不同行且两两不同列的 k 个小方格称为一个 k-组. 求具有下属性质的最大正整数 N: 可在该 $n\times n$ 的方格表中选取 N 个小方格, 并将其中每个小方格染为任意一种颜色, 使得这 N 个小方格中的任意一个 k-组中既有两格同色又有两格不同色.

3. 给定正整数 $n\geqslant 2$. 证明: 对于任意两两不同的整数 $a_1,a_2,\ldots,a_n$, 集合 $\left\{1,2,\ldots,\dfrac{n(n-1)}{2}\right\}$ 中至少有 $\left\lceil\dfrac{n(n-6)}{19}\right\rceil$ 个数不能表示为 $a_1,a_2,\ldots,a_n$ 中的两数之差. 这里 $\lceil x\rceil$ 表示不小于 x 的最小整数.

4. 设 $f(x),g(x)$ 是整系数多项式. 已知对无穷多个不同的素数 p, 存在整数 m_p 满足 $f(a)\equiv g(a+m_p)\pmod p$ 对任意整数 a 成立. 证明: 存在有理数 r, 使得 $f(x)=g(x+r)$.

5. 如图 2.1 所示, AB,AC 分别与圆 Ω 相切于 B,C 两点, D 是 AC 的中点, O 是 $\triangle ABC$ 的外心. 圆 Γ 过 A,C 两点, 与圆 Ω 的劣弧 $\overset{\frown}{BC}$ 相交于另一点 P, 与边 AB 相交于点 Q. 已知劣弧 $\overset{\frown}{PQ}$ 的中点 R 满足 $CR\perp AB$. L 是射线 PQ,CA 的交点. 设 M 是 AL 的中点, N 是 DR 的中点, $MX\perp ON$ 于点 X. 证明: $\triangle DNX$ 的外接圆经过 Γ 的圆心.

6. 给定正整数 n,r 及两两不同的素数 $p_1,p_2,\ldots,p_r$. 初始时刻黑板上写有 $(n+1)^r$ 个数: $p_1^{i_1}p_2^{i_2}\cdots p_r^{i_r}$ $(0\leqslant i_1,i_2,\ldots,i_r\leqslant n)$. 由甲先开始, 甲乙二人轮流进行如下操作, 知道黑板上只剩下一个数.

- 甲每次擦去黑板上任意两个数 (允许相等), 并在黑板上写下它们的最大公因数.
- 乙每次擦去黑板上任意两个数 (允许相等), 并在黑板上写下它们的最小公倍数.

求最小的正整数 M, 使得甲可以确保最后黑板上剩下的数不超过 M.

7. 如图 2.2 所示, 四边形 $ABCD$ 内接于圆 Γ, $AB+BC=AD+DC$. E 是弧 $\overset{\frown}{BCD}$ 的中点, F 是点 A 的对径点 (F 不与 C 重合), I 是 $\triangle ABC$ 的内心, J 是 $\triangle ABC$ 在 $\angle BAC$ 内的旁心, K 是 $\triangle BCD$ 的内心. 点 P 满足 $\triangle BIC$ 与 $\triangle KPJ$ 顺向相似 (顶点对应). 证明: 直线 EK 与直线 PF 的交点在圆 Γ 上.

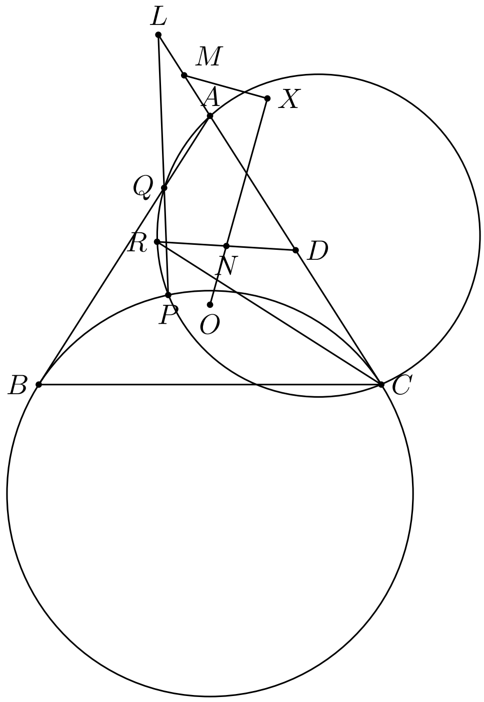

图 2.1

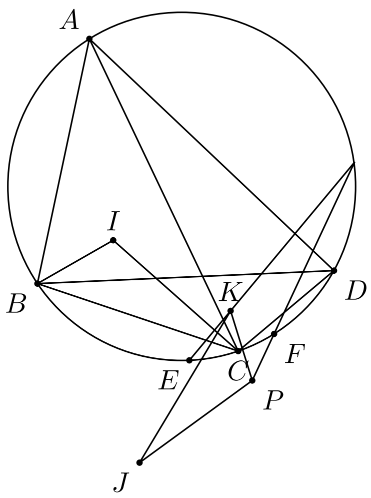

图 2.2

8. 给定正整数 k 和 n $(n \geqslant 2)$, 求满足下面条件的最小常数 c: 若 G 是一个有 m 个定点的简单 kn-正则图 (即每个顶点的度数均为 kn), 则可以将它的每个顶点染成 n 中颜色之一, 使得同色边的条数不超过 cm. 这里称一条边是同色边, 如果它的两个端点颜色相同.

9.　给定两两互素的正整数 a, b, c, 记 $f(n)$ 是方程 $ax + by + cz = n$ 的非负整数解 (x, y, z) 的个数. 证明: 存在实数 α, β, γ, 使得对于所有非负整数 n, 有

$$\left|f(n) - (\alpha n^2 + \beta n + \gamma)\right| < \frac{a+b+c}{12}.$$

10.　对正整数 n, 用 $\varphi(n)$ 表示与 n 互素且不超过 n 的正整数的个数. 求所有满足下列条件的函数 $f : \mathbb{N}_+ \to \mathbb{N}_+$:

对任意正整数 m, n, $m \geqslant n$, 有 $f(m\varphi(n^3)) = f(m)\varphi(n^3)$.

11.　设 n 是正整数, $a_1, a_2, \ldots, a_{2n+1}$ 是 $2n+1$ 个正实数. 对 $k = 1, 2, \ldots, 2n+1$, 定义

$$b_k = \max_{0 \leqslant m \leqslant n} \left(\frac{1}{2m+1} \sum_{i=k-m}^{k+m} a_i \right),$$

其中 a_i 的下标按照模 $2n+1$ 理解. 证明: 满足 $b_k \geqslant 1$ 的下标 k 的个数不超过 $2 \sum\limits_{i=1}^{2n+1} a_i$.

12.　求满足下属条件的最小正实数 a: 对于单位圆周上任意三点 A, B, C, 存在一个边长为 a 的正三角形 PQR, 使得点 A, B, C 都在三角形 PQR 的内部或边界上.

13.　凸 n $(n \geqslant 5)$ 边形 $\Omega : P_1P_2 \cdots P_n$ 的所有对角线无三线共点于 Ω 内部. 证明: 可以在每个四边形 $P_iP_jP_kP_\ell$ $(1 \leqslant i < j < k < \ell \leqslant n)$ 内部选出一个不在任何 Ω 的对角线上的点, 使得所选出的 C_n^4 个点两两不同, 且任意两点所确定的线段与至少一条 Ω 的对角线相交.

14.　给定 2021 个互不相同的正整数 $a_1, a_2, \ldots, a_{2021}$, 归纳定义数列 $\{a_n\}$ 如下: 对每个整数 $n \geqslant 2022$, a_n 是在 $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$ 中未出现的且不是乘积 $a_{n-1}a_{n-2}\cdots a_{n-2021}$ 的因数的最小正整数. 证明: 存在正整数 M, 使得所有不小于 M 得正整数都在数列 $\{a_n\}$ 中出现.

15.　求最大的正实数 C, 使得对任意整数 $n \geqslant 2$, 存在实数 $x_1, x_2, \ldots, x_n \in [-1, 1]$ 满足

$$\prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (x_i - x_j) \geqslant C^{\frac{n(n-1)}{2}}.$$

16.　对每个正整数 N, 记 N 的正因数个数为 $\tau(N)$, N 的两两不同的素因子个数为 $\omega(N)$, N 的素因子个数 (计入重数) 为 $\Omega(N)$. 证明: 对任意正整数 n, 有

$$\sum_{m=1}^{n} 5^{\omega(m)} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor \tau(k)^2 \leqslant \sum_{m=1}^{n} 5^{\Omega(m)}.$$

这里, $\lfloor x \rfloor$ 表示不超过实数 x 的最大整数.

17.　求所有函数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 满足: 对于任意 $x, y \in \mathbb{R}$,

$$f(xf(y) + y^{2021}) = yf(x) + (f(y))^{2021}.$$

18.　证明: 存在正实数 λ 满足: 对任意正整数 m, 如果平面直角坐标系中 $\triangle ABC$ 的三个顶点的横、纵坐标均为整数, 并且 $\triangle ABC$ 内部 (不含边界) 有且仅有一个点的横纵坐标均为 m 的整数倍, 则 $\triangle ABC$ 的面积小于 λm^3.

19. 给定整数 $n \geqslant 2$. 求最小的正整数 m, 使得存在 n^2 个两两不同的正实数 $x_{i,j}$ $(i \leqslant i, j \leqslant n)$ 满足以下条件:

(1) 对于任意 i, j, $x_{i,j} = \max\{x_{i,1}, x_{i,2}, \ldots, x_{i,j}\}$ 或 $x_{i,j} = \max\{x_{1,j}, x_{2,j}, \ldots, x_{i,j}\}$;

(2) 对于任意 i, 至多存在 m 个下标 k, 使得

$$x_{i,k} = \max\{x_{i,1}, x_{i,2}, \ldots, x_{i,k}\};$$

(3) 对于任意 j, 至多存在 m 个下标 k, 使得

$$x_{k,j} = \max\{x_{1,j}, x_{2,i}, \ldots, x_{k,j}\}.$$

20. 如图 2.3 所示, 锐角 $\triangle ABC$ $(AB < AC)$ 的内心是 I, 外接圆是 $\odot O$. M 和 N 分别是弧 $\overset{\frown}{BAC}$ 和 $\overset{\frown}{BC}$ 的中点. D 是 $\overset{\frown}{AC}$ 上一点, 满足 $AD \parallel BC$. $\triangle ABC$ 在 $\angle BAC$ 内的旁切圆与边 BC 相切于点 E. 点 F 在 $\triangle ABC$ 内, 满足 $IF \parallel BC$ 且 $\angle BAF = \angle CAE$. 设直线 NF 与 $\odot O$ 的另一个交点是 R, 直线 AF 与 DI 相交于点 K, 直线 AR 与 IF 相交于点 L. 证明: $NK \perp ML$.

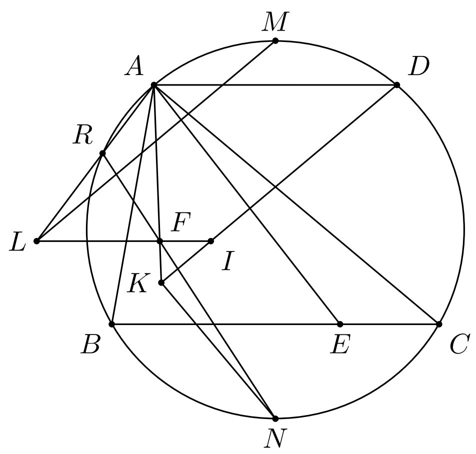

图 2.3

21. 记 $S(k)$ 为正整数 k 在十进制表示下的所有数码之和. 求所有整数 $n \geqslant 2$ 和有理数 $\beta \in (0,1)$, 使得存在 n 个两两不同的正整数 $a_1, a_2, \ldots, a_n$, 满足: 对于 $\{1, 2, \ldots, n\}$ 的任意 r $(r \geqslant 2)$ 元子集 I, 有

$$S\left(\sum_{i \in I} a_i\right) = \beta \sum_{i \in I} S(a_i).$$

22. 对所有实数 $x_1, x_2, \ldots, x_{60} \in [-1, 1]$, 求

$$\sum_{i=1}^{60} x_i^2 (x_{i+1} - x_{i-1})$$

的最大可能值, 这里 $x_0 = x_{60}$, $x_{61} = x_1$.

23. 求最小的正实数 α, 使得对面积为 1 的任意凸多边形 P, 存在平面上一点 M 使得 $P\cup Q$ 的凸包的面积不超过 α. 这里 Q 为 P 关于点 M 的中心对称图形.

24. 给定整数 $n \geqslant 2$, 有 $2n^2$ 位选手参加中国象棋比赛, 每两位选手恰对弈一局, 结果可以有平局. 已知:

(1) 对任意三位选手甲、乙、丙, 若甲胜乙, 且乙胜丙, 则甲胜丙;

(2) 所有比赛中平局的场数不超过 $\dfrac{n^3}{16}$.

证明: 可从这 $2n^2$ 位选手中选出 n^2 位选手, 并适当记作 P_{ij} $(i \leqslant i, j \leqslant n)$, 使得对任意 $i, j, i', j' \in \{1, 2, \ldots, n\}$, 若 $i > i'$, 则 P_{ij} 胜 $P_{i'j'}$.

2022 年中国国家队选拔考试

1. 如图 2.4, 设凸六边形 $ABCDEF$ 内接于圆, AB 的延长线与 DC 的延长线相交于点 G, AF 的延长线与 DE 的延长线相交于点 H. 记 $\triangle BCG$ 的外心为 M, $\triangle EFH$ 的外心为 N. 证明: BE, CF, MN 三线共点.

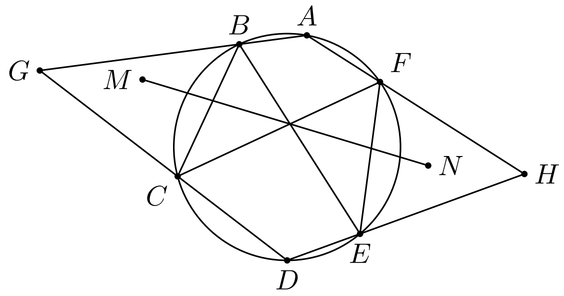

图 2.4

2. 给定素数 p, 设 A 是一个由整数构成的无穷集合. 证明: 可以选出 A 的一个 $2p-2$ 元子集 B, 使得 B 中任意 p 个两两不同的元素的算术平均值都不在 A 中.

3. 设 a, b, c, p, q, r 是给定的正整数, 且 $p, q, r \geqslant 2$. 令

$$Q = \{(x, y, z) \in \mathbb{Z}^3 : 0 \leqslant x \leqslant a,\ 0 \leqslant y \leqslant b,\ 0 \leqslant z \leqslant c\}.$$

初始时, 把 M 枚棋子放置在 A 中的某些点处 (一点处允许有多枚棋子). 之后可以进行如下三类操作:

(1) 从点 (x, y, z) 处取走 p 枚棋子, 并在点 $(x-1, y, z) \in Q$ 处放上一枚新棋子;

(2) 从点 (x, y, z) 处取走 q 枚棋子, 并在点 $(x, y-1, z) \in Q$ 处放上一枚新棋子;

(3) 从点 (x, y, z) 处取走 r 枚棋子, 并在点 $(x, y, z-1) \in Q$ 处放上一枚新棋子.

求 M 的最小值, 使得不论最初如何放置这 M 枚棋子, 都可以经过一系列上述操作, 使得点 $(0, 0, 0)$ 处没有棋子.

4. 如图 2.5, 锐角 $\triangle ABC$ 中, $\angle ACB > 2\angle ABC$, I 为内心, K 为 I 关于 BC 的对称点, BA 的延长线与 KC 的延长线交于点 D. 过 B 作 CI 的平行线, 与 $\triangle ABC$ 的外接圆的劣弧 $\overset{\frown}{BC}$ 交于点 E $(E \neq B)$. 过点 A 作 BC 的平行线, 与直线 BE 交于点 F.

证明: 若 $BF = CE$, 则 $AD = FK$.

5. 设 $C = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ 是复平面上的单位圆周, 240 个复数 $z_1, z_2, \ldots, z_{240} \in \mathbb{C}$ (可以相同) 满足下面两个条件:

(1) 对 C 上任意长度为 π 的开弧 Γ, 至多有 200 个 j $(1 \leqslant j \leqslant 240)$ 使得 $z_j \in \Gamma$;

(2) 对 C 上任意长度为 $\pi/3$ 的开弧 γ, 至多有 120 个 j $(1 \leqslant j \leqslant 240)$ 使得 $z_j \in \gamma$.

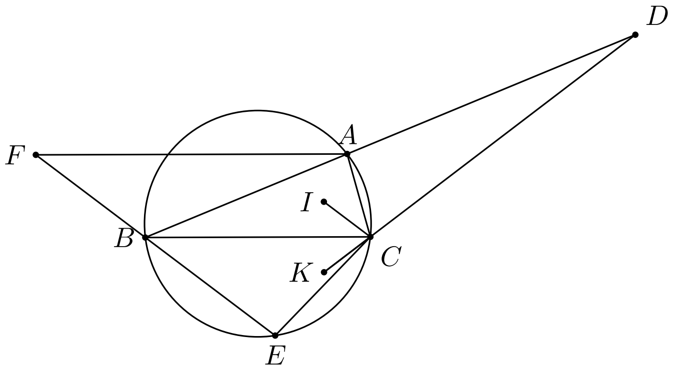

图 2.5

求 $|z_1 + z_2 + \cdots + z_{240}|$ 的最大值.

6. 设 m 是正整数, $A_1, A_2, \ldots, A_m$ 是有限集 A 的 m 个子集 (可以相同). 已知对 $\{1, 2, \ldots, m\}$ 的每个非空子集 I 均有

$$\left|\bigcup_{i \in I} A_i\right| \geqslant |I| + 1.$$

证明: 可将 A 中的每个元素染成黑白两种颜色之一, 使得 $A_1, A_2, \ldots, A_m$ 中的每个集合都同时包含黑色元素和白色元素.

7. 求所有的正整数对 (m, n), 使得在一个有 $m+1$ 条横线和 $n+1$ 条竖线的 $m \times n$ 方格表中, 可以对其中一些小方格添加一条对角线, 即每个小方格 □ 变成 □,⧄,⧅ 之一, 满足整个图形 (包括原来的横竖线和添加的线) 可以一笔画并回到起点.

8. 设非直角 $\triangle ABC$ 中, $BC > AC > AB$, 平面上不重合的两点 P_1, P_2 满足如下条件: 对 $i = 1, 2$, 记直线 AP_i, BP_i, CP_i 与 $\triangle ABC$ 的外接圆的另一交点分别为 D_i, E_i, F_i, 则 $D_iE_i \perp D_iF_i$ 且 $D_iE_i = D_iF_i \neq 0$.

已知直线 P_1P_2 交 $\triangle ABC$ 的外接圆于两点 Q_1, Q_2. 对 $i = 1, 2$, 记 Q_i 在直线 AB, AC 上的投影分别为 X_i, Y_i. 直线 X_1Y_1 和 X_2Y_2 的交点为 W. 证明: W 在 $\triangle ABC$ 的九点圆上.

9. 已知 n 个正整数 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ 两两互不整除, 即对任意 $i \neq j$ 均有 a_i 不整除 a_j. 证明: $a_1 + a_2 + \cdots + a_n \geqslant 1.1n^2 - 2n$.

10. 给定正整数 n, 求所有使得 $\mathbb{R}^n$ 上的函数

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{k_1=0}^{2} \sum_{k_2=0}^{2} \cdots \sum_{k_n=0}^{2} |k_1x_1 + k_2x_2 + \cdots + k_nx_n - 1|$$

取到最小值的点 $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

11. 对给定的正整数 n, 令 D 为由 n 的所有正因子所构成的集合. 证明: 对于映射 $f: D \to \mathbb{Z}$, 如下两个断言等价.

(A) 对 n 的每个正因子 m, 都有

$$n \mid \sum_{d \mid m} f(d) \mathrm{C}_{n/d}^{m/d};$$

(B) 对 n 的每个正因子 k, 都有

$$k \mid \sum_{d \mid k} f(d).$$

12. 设正整数 m, n 满足 $m \geqslant n \geqslant 2002$. 证明: 对任意实数 $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n$, 满足 $|a_i + b_j - ij| \leqslant m$ 的有序数对 (i, j) $(1 \leqslant i, j \leqslant n)$ 的个数不超过 $3n\sqrt{m \ln n}$.

13. 已知平面上圆 Γ_2 在圆 Γ_1 的内部. 证明平面上存在点 P 满足如下条件:

若 ℓ 是一条不过点 P 的直线, 且 ℓ 与 Γ_1 交于不同两点 A, B, 与 Γ_2 交于不同两点 C, D (其中 A, C, D, B 在 ℓ 上顺次排列), 则 $\angle APC = \angle DPB$.

14. 已知正实数 α, β 满足: 对任意正整数 k_1, k_2 均有 $\lfloor k_1\alpha \rfloor \neq \lfloor k_2\beta \rfloor$, 其中 $\lfloor x \rfloor$ 表示不超过 x 的最大整数. 证明: 存在正整数 m_1, m_2 使得

$$\frac{m_1}{\alpha} + \frac{m_2}{\beta} = 1.$$

15. 给定整数 $n \geqslant 2$, 求满足下列两个条件的所有 n 元整数数组 $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$:

(1) a_1 是奇数, $1 < a_1 \leqslant a_2 \leqslant \cdots \leqslant a_n$, 且 $M = \dfrac{1}{2^n}(a_1 - 1)a_2 \cdots a_n$ 是整数;

(2) 存在 M 个 n 元整数数组 $(c_{i,1}, c_{i,2}, \ldots, c_{i,n})$ $(i = 1, 2, \ldots, M)$, 满足对任何 $1 \leqslant i < j \leqslant M$ 都存在 $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ 使得

$$c_{i,j} - c_{j,k} \not\equiv -1, 0, 1 \pmod{a_k}.$$

16. 求所有正整数 k, 使得平面直角坐标系中存在有限多个重心为整点的三角形, 其中任意两个三角形的交集或为空集, 或为一个公共顶点, 或为连接两个公共顶点的边, 且这些三角形的并集是一个边长为 k 的正方形 (该正方形的顶点可以不是整点, 边可以不平行于坐标轴).

17. 证明: 存在正实数 C 和 $\alpha > \dfrac{1}{2}$, 使得对任意的正整数 n, 均存在 $\{1, 2, \ldots, n\}$ 的子集 A, 满足 $|A| > Cn^\alpha$, 且 A 中任意两个不同数的差不是完全平方数.

18. (1) 证明: 在复平面上, 方程 $z^{20} + 63z + 22 = 0$ 的全体复根的凸包的面积大于 π.

(2) 设 n 为正整数, $1 \leqslant k_1 < k_2 < \cdots < k_n$ 为 n 个奇数. 证明: 对任意总和为 1 的 n 个复数 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ 以及模长不小于 1 的复数 w, 方程

$$a_1 z^{k_1} + a_2 z^{k_2} + \cdots + a_n z^{k_n} = w$$

都至少有一个模长不超过 $3n|w|$ 的复根.

19. 在 $n \times n$ $(n \geqslant 2)$ 的网格屏上, 每个单位方格初始时显示红黄蓝三种颜色之一. 每一秒钟网格屏中所有单位方格按如下方式同时变换颜色, 称为一轮变换:

- 对当前颜色是红色的单位方格 A, 如果当前存在黄色单位方格与它有公共边, 那么下一秒钟 A 变为黄色, 否则 A 的颜色仍为红色;
- 对当前颜色是黄色的单位方格 B, 如果当前存在蓝色单位方格与它有公共边, 那么下一秒钟 B 变为蓝色, 否则 B 的颜色仍为黄色;
- 对当前颜色是蓝色的单位方格 C, 如果当前存在红色单位方格与它有公共边, 那么下一秒钟 C 变为红色, 否则 C 的颜色仍为蓝色.

证明: 如果在 $2n-2$ 轮变换后屏幕没有变成单一颜色, 那么它将永远不会变成单一颜色.

20. 如图 2.6 所示, 在凸四边形 $ABCD$ 中, $\triangle ABC, \triangle ADC$ 的内心分别为 I, J. 已知 IJ, AC, BD 相交于一点 P. 过 P 且垂直于 BD 的直线与 $\angle BAD$ 的外角平分线相交于点 E, 与 $\angle BCD$ 的外角平分线相交于点 F. 证明: $PE = PF$.

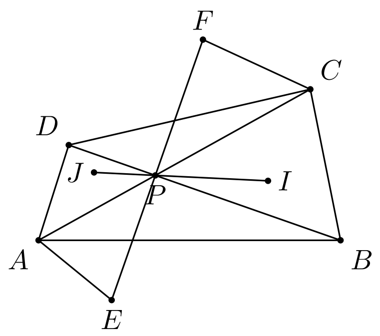

图 2.6

21. 求所有的函数 $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 满足: 对任意实数 x, y, 如下两个可重集相等

$$\{f(xf(y)+1), f(yf(x)-1)\} = \{xf(f(y))-1, yf(f(x))+1\}.$$

注: $\{a,b\} = \{c,d\}$ 作为可重集相等指 $a=c$, $b=d$, 或者 $a=d$, $b=c$.

22. 求所有的素数 p 和正整数 a, b, c 满足

$$2^a p^b = (p+2)^c + 1.$$

23. 设 n 是正整数, $2n$ 个非负实数 $x_1, x_2, \ldots, x_{2n}$ 满足 $x_1 + x_2 + \cdots + x_{2n} = 4$. 证明: 存在非负整数 p, q 使得 $q \leqslant n-1$, 且

$$\sum_{i=1}^{q} x_{p+2i-1} \leqslant 1, \qquad \sum_{i=q+1}^{n-1} x_{p+2i} \leqslant 1.$$

注 1: 下标按模 $2n$ 理解, 即若 $k \equiv \ell \pmod{2n}$, 则 $x_k = x_\ell$.

注 2: 若 $q = 0$, 则第一个求和视为 0; 若 $q = n-1$, 则第二个求和视为 0.

24. 给定正整数 n, 用 D 表示 n 的所有正因子构成的集合. 设 A, B 是 D 的子集, 满足: 对任何 $a \in A$, $b \in B$, 总有 a 不整除 b 且 b 也不整除 a. 证明:

$$\sqrt{|A|} + \sqrt{|B|} \leqslant \sqrt{|D|}.$$

第三章　中国女子数学奥林匹克 (CGMO)

2019 年中国女子数学奥林匹克

1. 如图 3.1 所示, 四边形 $ABCD$ 内接于 $\odot O$, 过点 B,C 作 $\odot O$ 的切线相交于点 L. 设 M 是 BC 的中点, 过 D 作 AM 的平行线, 与 $\triangle ADL$ 的外接圆交于另一点 P. 设 AP 与 $\odot O$ 交于另一点 E, 与 DM 交于点 K. 证明: $DK = EK$.

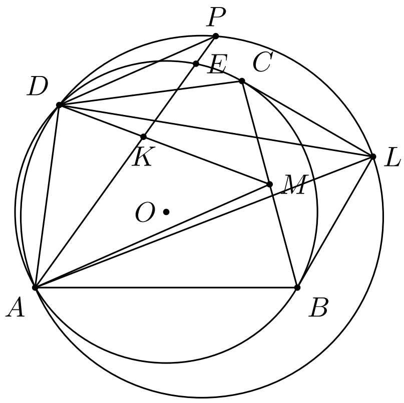

图 3.1

证明. 如图 3.2.

由 $\angle OBL = \angle OMB = \pi/2$ 可得 $OM \cdot OL = OB^2 = OA^2 = OD^2 = OE^2$. 那么

$$\begin{aligned}\angle ODM &= \angle OLD = \angle ALD - \angle ALO\\&= \angle APD - \angle OAM = \angle PAM - \angle OAM\\&= \angle PAO = \angle OEA.\end{aligned}$$

由 $\angle ODE = \angle OED$, 于是 $\angle KDE = \angle KED$. 所以 $KD = KE$.

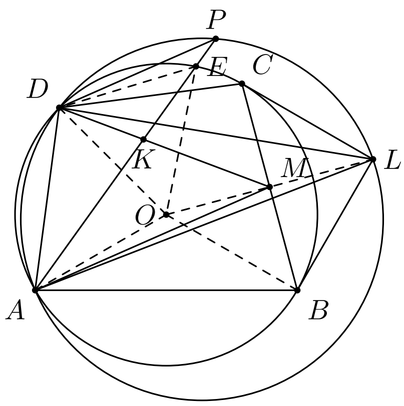

图 3.2

□

2. 请给出正整数 $a_1, a_2, \ldots, a_{18}$ 使得 $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_{18} = 2019$, 并且对于任意 k $(3 \leqslant k \leqslant 18)$, 均存在 i, j $(1 \leqslant i < j < k)$ 使得 $a_k = a_i + a_j$.

解. $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_3 = 3$, $a_4 = 5$, $a_5 = 6$, $a_6 = 7$, $a_7 = 13$, $a_8 = 20$, $a_9 = 33$, $a_{10} = 39$, $a_{11} = 72$, $a_{12} = 111$, $a_{13} = 183$, $a_{14} = 294$, $a_{15} = 477$, $a_{16} = 771$, $a_{17} = 1248$, $a_{18} = 2019$. □

3. 对任意数列可进行如下操作: 每次选取数列中相邻三项, 记为 a, b, c, 替换为 b, c, a, 其它项保持不变. 试确定所有的整数 $n \geqslant 3$, 使得数列 $1, 2, \ldots, n$ 可经有限次操作变成 $n, n-1, \ldots, 1$.

解. 对于数列 $x = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$, 定义其逆序数

$$I(x) = I(x_1, \ldots, x_m) = \big|\{(i, j) : 1 \leqslant i < j \leqslant m,\, x_i > x_j\}\big|.$$

对于题设中给定的操作 f 将数列 x 变为数列 y, 有

$$I(x) - I(y) = I(a, b, c) - I(b, c, a) \in \{-2, 0, 2\},$$

所以操作保持数列的逆序数的奇偶性.

注意到 a, b, c 替换为 b, c, a 实质上是将 a 向右移动两位; 而同样的操作执行两次可将 a, b, c 替换为 c, a, b, 即将 b 向右移动一位. 结合上述两种方法, 当 $n \geqslant 3$ 时一定可以将 n 从任意位置移到末尾. 根据数学归纳法, 一定可以将 $1, 2, \ldots, n$ 的任意排列构成的数列替换为末尾是 $3, 4, \ldots, n$ 的数列. 所以 $1, 2, \ldots, n$ 的逆序数为 0 而 $2, 1, 3, 4, \ldots, n$ 的逆序数为 1, 所有长度为 n 的逆序数为偶数的数列都可以通过有限次操作变成 $1, 2, \ldots, n$.

根据操作的可逆性, $1, 2, \ldots, n$ 可以通过有限次操作变成任意长度为 n 的逆序数为偶数的数列. 由于 $n, n-1, \ldots, 1$ 的逆序数为 $n(n-1)/2$ 是一个偶数, 所以 $n \equiv 0, 1 \pmod 4$. □

4. 给定坐标平面上的平行四边形 $OABC$, 设 O 是原点, A, B, C 都是整点 (坐标都是整数). 证明: 对于 $\triangle ABC$ 内部及边界上的任意整点 P, 存在 $\triangle OAC$ 内部及边界上的整点 Q, R (可以相同), 使得 $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{OR}$.

5. 设素数 p 整除 $2^{2019} - 1$, 定义数列 $\{a_n\}$:

$$a_0 = 2, \quad a_1 = 1, \quad a_{n+1} = a_n + \frac{p^2 - 1}{4} a_{n-1}\ (n \geqslant 1).$$

证明: 对于任意 $n \geqslant 0$, 均有 p 不整除 $1 + a_n$.

6. 设 $0 \leqslant x_1 \leqslant x_2 \leqslant \cdots \leqslant x_n \leqslant 1$, 其中 $n \geqslant 2$. 证明:

$$\sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n} + \sqrt[n]{(1 - x_1)(1 - x_2) \cdots (1 - x_n)} \leqslant \sqrt[n]{1 - (x_1 - x_n)^2}.$$

7. 如图 3.3 所示, 在锐角 $\triangle ABC$ 中, $AB < AC$. 点 D, E, F 分别在边 BC, CA, AB 上, 使得 B, C, E, F 四点共圆且 AD, BE, CF 交于点 P. 直线 BC 关于直线 AD 的对称直线与射线 EF 相交于点 K. 设 M 是 EF 的中点. 证明: A, M, P, K 四点共圆.

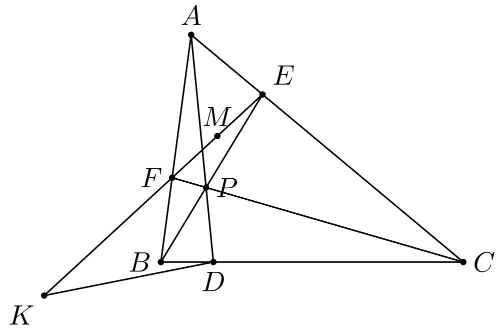

图 3.3

证明. 如图 3.4. 设线段 BC 的中点为 N, 点 N 关于直线 AD 的对称点为 N'.

由 B, C, E, F 四点共圆得 $\triangle ABC \sim \triangle AEF$ 且 $\triangle PBC \sim \triangle PFE$. 由于 M, N 是 EF, BC 的中点, $\triangle ANC \sim \triangle AMF$ 且 $\triangle PNB \sim \triangle PMF$.

那么 $\angle AN'K = \angle ANC = \angle AMF$, 从而 A, M, N', K 四点共圆. 另一方面,

$$\angle AMP = \angle AMF + \angle PMF = \angle ANC + \angle PNB = \pi - \angle ANP = \pi - \angle AN'P,$$

于是 A, M, P, N' 四点共圆. 所以 A, M, P, K 四点共圆.

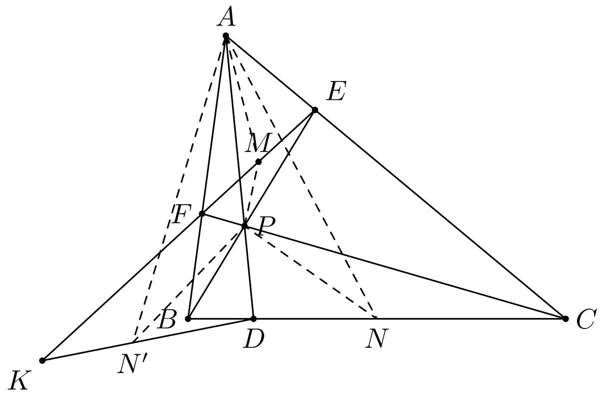

图 3.4

□

8. 空间中给定 8 个点, 任意 4 点不共面, 每 2 点之间连有一条线段, 并标记一个方向, 所得图形称为 “定向图”. 若从一个定向图上任意点出发, 沿标记的方向移动, 均无法回到出发点, 则该图称为 “好图”. 证明:

(1) 存在一个定向图, 使得任意改变图中不超过 7 条线段的方向, 都不能将该图变为好图;

(2) 对于任意一个定向图, 都可以改变图中不超过 8 条线段的方向, 将该图变为好图.

2020 年中国女子数学奥林匹克

1. 如图 3.5, 在四边形 $ABCD$ 中, $AB = AD$, $CB = CD$, $\angle ABC = 90°$, 点 E, F 分别在线段 AB, AD 上, 点 P, Q 在线段 EF 上 (P 在 E, Q 之间), 满足 $\dfrac{AE}{EP} = \dfrac{AF}{FQ}$. 点 X, Y 分别在线段 CP, CQ 上, 满足 $BX \perp CP$, $DY \perp CQ$. 证明: X, P, Q, Y 四点共圆.

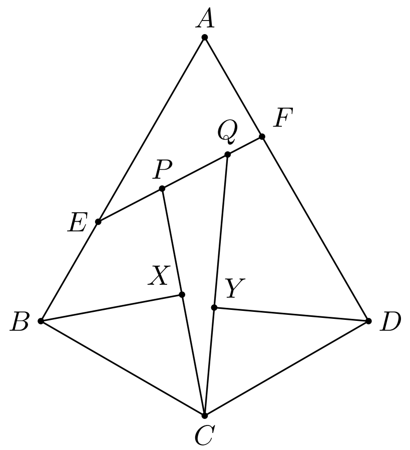

图 3.5

2. 给定整数 $n \geqslant 2$, 设 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ 是任意整数, 求

$$2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}[x_ix_j] - (n-1)\sum_{i=1}^{n}[x_i^2]$$

的最大值, 其中 $[x]$ 表示不超过实数 x 的最大整数.

3. 设有三个班级, 每班恰有 n 名同学, 这 $3n$ 名同学的身高两两不同. 现将这些同学分成 n 组, 每组 3 名同学分别来自不同的班级, 并将每组中身高最高的同学称为"高个子". 已知无论怎样分组, 每班都至少有 10 名同学是"高个子". 证明: n 的最小可能值是 40.

4. 设 p, q 是两个不同的素数, $p > q$. 证明: $p! - 1$ 与 $q! - 1$ 的最大公因数不超过 $p^{p/3}$.

5. 求满足下面两个条件的所有实数序列 $\{b_n\}_{n\geqslant 1}$ 和 $\{c_n\}_{n\geqslant 1}$:

(1) 对任意正整数 n, $b_n \leqslant c_n$;

(2) 对任意正整数 n, b_{n+1} 与 c_{n+1} 是一元二次方程 $x^2 + b_nx + c_n = 0$ 的两根.

6. 设 p, q 均是大于 1 的整数, 且 p 与 q 互素. 证明:

$$\sum_{k=1}^{q-1}\left[\frac{pk}{q}\right]^2 \equiv 2p\sum_{k=1}^{q-1}k\left[\frac{pk}{q}\right] \pmod{q-1}.$$

其中 $[x]$ 表示不超过实数 x 的最大整数.

7. 如图 3.6, $\odot O$ 是 $\triangle ABC$ 的外接圆, $AB < AC$, $\angle BAC = 120^\circ$. 设 M 是弧 $\overparen{BAC}$ 的中点, 点 P, Q 使得 PA, PB, QA, QC 均与 $\odot O$ 相切, H, I 分别是 $\triangle POQ$ 的垂心和内心, N 是线段 OI 的中点, D 是直线 MN 与 $\odot O$ 的另一个交点. 证明: $IH \perp AD$.

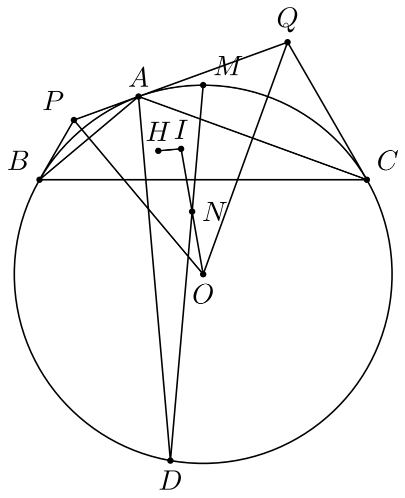

图 3.6

8. 给定正整数 n, 一个有限项正整数列 $(a_1, \ldots, a_m)$ 称为 "n-偶数列": 若 $n = a_1 + \cdots + a_m$, 且共有偶数个整数对 (i, j) 满足 $1 \leqslant i < j \leqslant m$ 而 $a_i > a_j$. 求 n-偶数列的个数. 例如, 共有六个 4-偶数列: (4), $(1, 3)$, $(2, 2)$, $(1, 1, 2)$, $(2, 1, 1)$, $(1, 1, 1, 1)$.

2021 年中国女子数学奥林匹克

1. 设 n 是正整数, $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}, p, q$ 是正实数, 满足 $p < q$, 且

$$x_{n+1}^p > x_1^p + x_2^p + \cdots + x_n^p.$$

(1) 证明: $x_{n+1}^q > x_1^q + x_2^q + \cdots + x_n^q$;

(2) 证明: $(x_{n+1}^p - x_1^p - x_2^p - \cdots - x_n^p)^{1/p} < (x_{n+1}^q - x_1^q - x_2^q - \cdots - x_n^q)^{1/q}$.

2. 如图 3.7 所示, 在锐角三角形 ABC 中, $AB < AC$, I 是内心, J 是顶点 A 所对的旁心. 点 X, Y 分别在三角形 ABC 外接圆的劣弧 $\overset{\frown}{AB}, \overset{\frown}{AC}$ 上, 满足 $\angle AXI = \angle AYI = 90°$. 点 K 在 BC 的延长线上, 满足 $KI = KJ$. 证明: 直线 AK 平分线段 XY.

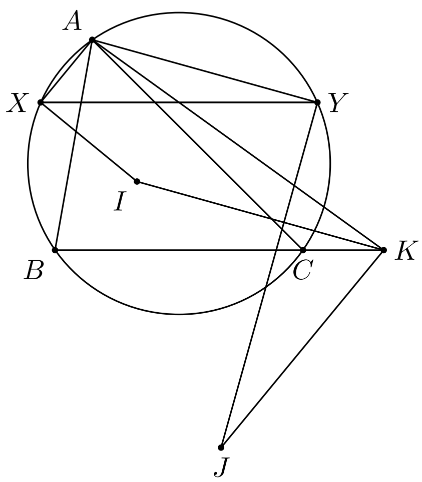

图 3.7

证明. 如图 3.8. 设 $\triangle ABC$ 的外心为 O, 点 A 关于点 O 的对称点为 A'. 设 $\overset{\frown}{BA'C}$ 的中点为 M. 设直线 AX, AY 分别交 BC 于 P, Q.

由鸡爪定理知 A, I, M, J 四点共线且 M 是四边形 $BICJ$ 的外接圆圆心, 称该圆为 $\odot M$.

由 $\angle AXI = \angle AYJ = \pi/2$ 知 A', I, X 三点共线, J, A', Y 三点共线.

由 $KI = KJ$, $MI = MJ$ 知直线 MK 是线段 IJ 的垂直平分线, 又 $A'M \perp AM$, 于是 A' 在直线 MK 上, 从而 $A'I = A'J$.

那么 $\angle AIX = \angle A'IJ = \angle A'JI$, 于是 $\angle XAI = \angle YAJ$, 从而 M 是 $\overset{\frown}{XA'Y}$ 的中点. 由 $MB = MC$, $MX = MY$ 可得 $XY \parallel BC$.

称 $\triangle AXI$ 的外接圆为 Γ. 由于 AI 是 Γ 的直径, IJ 是 $\odot M$ 的直径, 可得 Γ 与 $\odot M$ 外切.

由于点 P 是 $\odot O, \odot M, \Gamma$ 三圆的根心, P 在 $\odot M, \Gamma$ 的根轴上, 即在过点 I 且与 AM 垂直的直线上, 所以 $PI \perp AM$, 同理, $QJ \perp AM$.

由 $PI \parallel MK \parallel QJ$ 且 M 是 IJ 中点知 K 是 PQ 中点, 所以 AK 平分 XY.

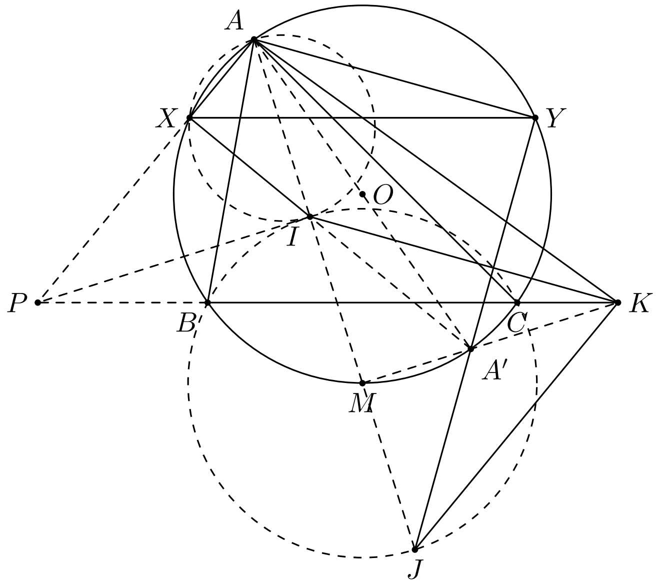

图 3.8

$\square$

3. 求最小的正整数 n, 使得可将 $n \times n$ 的方格表中的每个小方格染为红、黄、蓝三种颜色之一, 满足一下三个条件:

(1) 每种颜色的小方格数目相同;

(2) 若某行中有红格, 则该行中必有蓝格, 且无黄格;

(3) 若某列中有蓝格, 则该列中必有红格, 且无黄格.

4. 我们称一个正整数数列 $\{a_n\}_{n\geqslant 1}$ 是 CGMO 数列, 如果 $\{a_n\}_{n\geqslant 1}$ 是严格递增的, 并且对任意整数 $n \geqslant 2022$, a_n 是在所有大于 a_{n-1} 的正整数中满足一下条件的最小数: 存在 $\{a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}\}$ 的一个非空子集 A, 使得 $a_n \cdot \prod\limits_{a\in A_n} a$ 是完全平方数.

证明: 存在正常数 c_1, c_2, 使得对任意一个 CGMO 数列 $\{a_n\}_{n\geqslant 1}$, 均存在正整数 N (依赖于这个数列), 满足对任意整数 $n \geqslant N$, 有 $c_1 n^2 \leqslant a_n \leqslant c_2 n^2$.

5. 证明: 从集合 $\{1, 2, \ldots, 20\}$ 中任取 4 个 (可以相同的) 数后, 必可将其中 3 个数适当地记为 a, b, c, 使得关于 x 的同余方程 $ax \equiv b \pmod{c}$ 有整数解.

6. 设 S 是一个有限集合, $P(S)$ 是 S 的所有子集构成的集合. 对任意函数 $f: S \to \mathbb{R}$, 证明:

$$\sum_{A\in P(S)} \sum_{B\in P(S)} f(A)f(B)2^{|A\cap B|} \geqslant 0.$$

这里 $|X|$ 表示有限集合 X 的元素个数.

7. 如图 3.9 所示, 在锐角 $\triangle ABC$ 中, $AB > AC$, O 是外心. 点 B 关于 AC 的对称点为 K, 点 C 关于 AB 的对称点为 L. X 是 $\triangle ABC$ 内部一点, 满足 $AX \perp BC$, $XK = XL$. 点 Y, Z 分别在线段 BK, CL 上, 满足 $XY \perp CK$, $XZ \perp BL$.

证明: B, C, Y, O, Z 五点共圆.

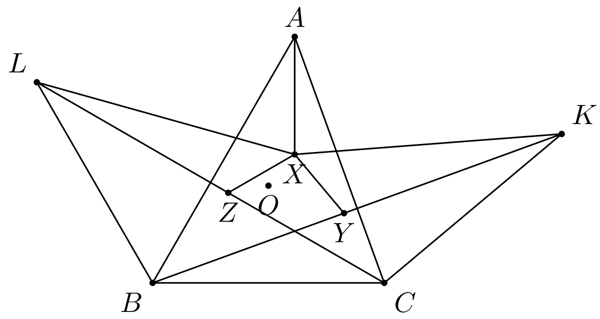

图 3.9

8. 设 m, n 是正整数, 定义

$$f(x) = (x-1)(x^2-1)\cdots(x^m-1),$$
$$g(x) = (x^{n+1}-1)(x^{n+2}-1)\cdots(x^{n+m}-1).$$

证明: 存在 mn 次整系数多项式 $h(x)$, 满足 $f(x)h(x) = g(x)$, 并且 $h(x)$ 的 $mn+1$ 个系数均为正整数.

2022 年中国女子数学奥林匹克

1. 考虑所有满足一下两个条件的实数序列 $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{100}$:

(1) $x_0 = 0$;

(2) 对任意 $1 \leqslant i \leqslant 100$, 有 $1 \leqslant x_i - x_{i-1} \leqslant 2$.

求最大的正整数 $k \leqslant 100$, 使得对任意这样的序列, 均有

$$x_k + x_{k+1} + \cdots + x_{100} \geqslant x_0 + x_1 + \cdots + x_{k-1}.$$

2. 设 n 是正整数. 有 $3n$ 支女子排球队参加锦标赛, 每两支球队之间至多比赛一场 (排球比赛没有平局). 已知该锦标赛一共比赛了 $3n^2$ 场.

求证: 存在一支球队, 其胜场数与负场数均不小于 $n/4$.

3. 如图 3.10, 在 $\triangle ABC$ 中, I 是内心, AM 是中线. 设过 I 且与 BC 垂直的直线与 AM 交于点 L, I 关于 A 的对称点为 J. 求证: $\angle ABJ = \angle LBI$.

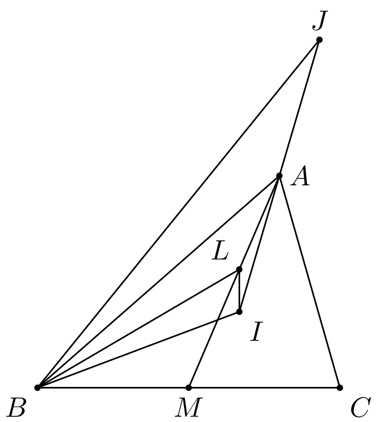

图 3.10

4. 给定素数 $p \geqslant 5$. 求三个连续正整数的乘积模 p 的不同余数的个数.

5. 如图 3.11, 在 $\triangle ABC$ 中, K, L 是内部两点, D 是边 AB 上一点. 已知 B, K, L, C 四点共圆, 且 $\angle AKD = \angle BCK$, $\angle ALD = \angle BCL$. 求证: $AK = AL$.

证明. 如图 3.12. 延长 AK, AL 分别交 $BKLC$ 的外接圆于点 K', L'.

由 $\angle AKD = \angle BCK = \angle AK'B$ 可得 $DK \mathbin{/\!/} BK'$, 同理 $DL \mathbin{/\!/} BL'$. 于是 $\triangle DKL$, $\triangle BK'L'$ 关于点 A 位似. 从而 $KL \mathbin{/\!/} K'L'$, 即 $KLL'K'$ 是等腰梯形. 所以 $AK = AL$.

□

6. 求所有具有下属性质的正整数 n: 存在非空有限整数集合 A, B, 使得对任意整数 m, 以下三个命题中恰有一个成立.

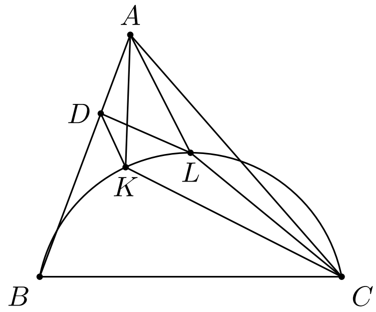

图 3.11

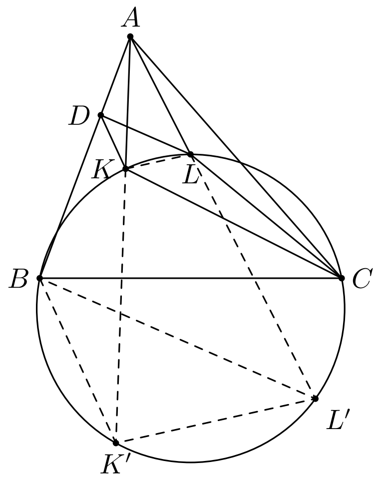

图 3.12

(1) 存在 $a \in A$, 使得 $m \equiv a \pmod{n}$;

(2) 存在 $b \in B$, 使得 $m \equiv b \pmod{n}$;

(3) 存在 $a \in A$, $b \in B$, 使得 $m \equiv a + b \pmod{n}$.

7. 设整数 $n \geqslant 3$. 给定凸 n 边形 P. 一种将 P 的每个顶点染成红、黄、蓝三种颜色之一的染色方程称为 “好的”, 如果 P 内部任何一点都在一个以 P 的三个互不同色的顶点所构成的三角形的内部或边界上. 求好的染色方式的个数.

注: 两种染色方式若在某个顶点上颜色不同就认为是不同的染色方式.

8. 设 $x_1, x_2, \ldots, x_{11}$ 是非负实数, 且总和等于 1. 对 $i = 1, 2, \ldots, 11$, 记

$$y_i = \begin{cases} x_i + x_{i+1}, & 2 \nmid i \\ x_i + x_{i+1} + x_{i+2}, & 2 \mid i \end{cases},$$

这里 $x_{12} = x_1$. 记 $F(x_1, x_2, \ldots, x_{11}) = y_1 y_2 \cdots y_{11}$.

求证: 当 F 取得最大值时, 一定有 $x_6 < x_8$.

2023 年中国女子数学奥林匹克

1. 求所有的正整数组 (a,b,c), 使得 $\dfrac{a}{2^a}=\dfrac{b}{2^b}+\dfrac{c}{2^c}$.

2. 用 144 根完全相同的长度为 1 的细棒摆成边长为 8 的正方形网格状图形. 问: 至少需要取走多少根细棒, 才能使得剩余图形中不含矩形?

3. 设实数 $a,b,c,d\in[0,1]$. 求证:
$$\frac{1}{1+a+b}+\frac{1}{1+b+c}+\frac{1}{1+c+d}+\frac{1}{1+d+a}\leqslant\frac{4}{1+2\sqrt[4]{abcd}}.$$

4. 如图 3.13, 四边形 $ABCD$ 内接于圆 ω, 对角线 AC,BD 互相垂直且交于点 E. F 是 AD 上一点, 延长 FE 交 ω 于点 P. 在 PE 上取点 Q, 使得 $PQ\cdot PF=PE^2$. 过 Q 作 AD 的垂线交 BC 于点 R. 求证: $RQ=RP$.

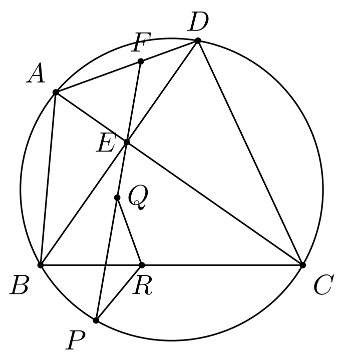

图 3.13

证明. 如图 3.14. 作 $QS\parallel AC$ 交 BC 于点 S, 延长 PS 交 AC 于点 G.

由 $QS\parallel AC$ 得 $PS/PG=PQ/PE=PE/PF$, 那么 $ES\parallel FG$. 于是
$$\frac{DF\sin\angle FDE}{DP\sin\angle PDE}=\frac{FE}{PE}=\frac{GS}{PS}=\frac{CG\sin\angle GCS}{CP\sin\angle PCS},$$
而 $\angle FDE=\angle GCS$, $\angle PDE=\angle PCS$, 所以 $DF/DP=CG/CP$, 从而 $\triangle PDF\sim\triangle PCG$.

那么 $\angle AFP=\angle AGP$, 于是
$$\angle QPS=\angle CAD=\angle DCB=\frac{\pi}{2}-\angle RSQ=\frac{1}{2}\angle QRS.$$
由 $\angle RSQ=\angle ACB=\angle ADB=\angle RQS$, 可知 $RQ=RS$, 所以点 P 在以 R 为圆心, RQ 为半径的圆上, 从而 $RQ=RP$.

□

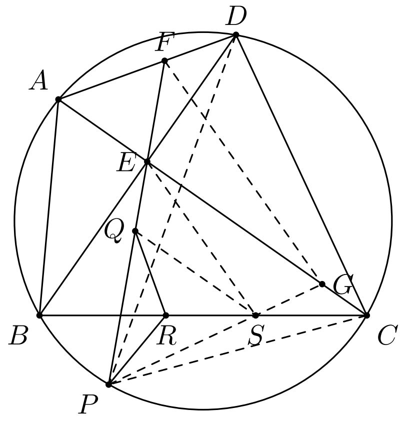

图 3.14

5. 如图 3.15, 在锐角 $\triangle ABC$ 中, $AB < AC$, AH 是高, G 是重心, P, Q 分别是内切圆与 AB, AC 的切点, M, N 分别是 PB, QC 的中点. 点 D, E 在内切圆上, 满足 $\angle BDH + \angle ABC = 180°$, $\angle CEG + \angle ACB = 180°$. 求证: MD, NE, HG 三线共点.

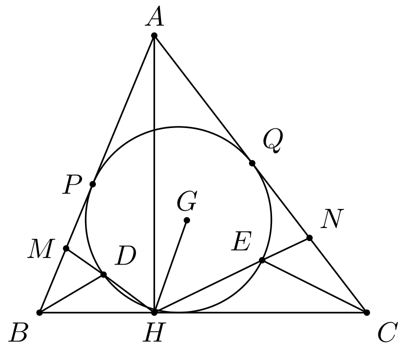

图 3.15

证明. 如图 3.16. 记 $\triangle ABC$ 的外接圆、内切圆分别为 Γ, Ω, $\triangle BDH, \triangle CEH$ 的外接圆为 ω_1, ω_2. 设 ω_1, ω_2 交于除 H 外的另一点 X, 设直线 HX 交 Γ 于另一点 Y. 设线段 BC 的中点为 L, 设 AL 交 XY 于点 G'.

那么

$$\angle BXC = \angle BXH + \angle CXH = (\pi - \angle BDH) + (\pi - \angle CEH) = \angle ABC + \angle ACB = \pi - \angle BAC.$$

于是 X 在 Γ 上.

由 $\angle ABC = \pi - \angle BDH = \angle BXY$ 可得 PB 是 ω_1 的一条切线, 从而 BP 是 Ω 与 ω_1 的外公切线. 由 M 是 BP 的中点, 于是直线 MD 是 Ω, ω_1 的根轴, 同理 NE 是 Ω, ω_2 的根轴. 由于直线 XY 是 ω_1, ω_2 的根轴, 所以 MD, NE, XY 三线共点.

由 $\angle ABC=\angle BXY$ 可得 $AC=BY$, 于是 $ABCY$ 是等腰梯形. 由于 L 是 BC 的中点, $AY=2HL$, 那么 $AG'=2G'L$, 所以点 G 与 G' 重合, 从而 MD,NE,HG 三线共点.

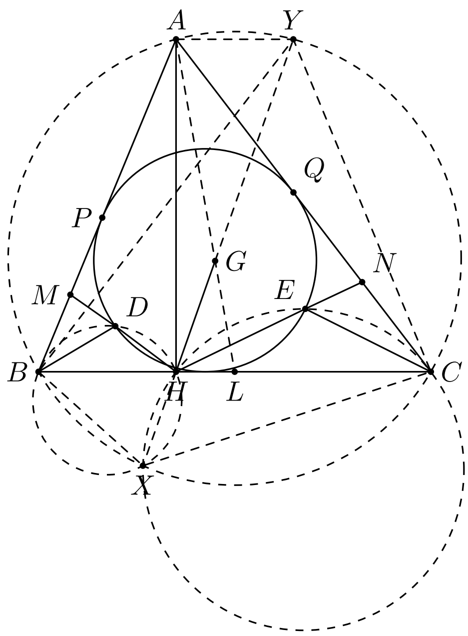

图 3.16

□

6. 设 $x_i\in[2^{i-1},2^i]$, $i=1,2,\ldots,22$, 求

$$(x_1+x_2+\cdots+x_{22})\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_{22}}\right)$$

的最大值.

7. 设 p 是奇素数, 正整数 a,b,m,r 满足 $p\nmid ab$ 且 $ab>m^2$. 求证: 至多存在一对互素的正整数 x,y, 使得 $ax^2+by^2=mp^r$.

8. 对平面直角坐标系中任意两点 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$, 定义

$$d(A,B)=|x_1-x_2|+|y_1-y_2|.$$

设 $P_1,P_2,\ldots,P_{2023}$ 是该坐标系中 2023 个两两不同的点, 记

$$\lambda=\frac{\max\limits_{1\leqslant i<j\leqslant 2023} d(P_i,P_j)}{\min\limits_{1\leqslant i<j\leqslant 2023} d(P_i,P_j)}.$$

(1) 求证: $\lambda\geqslant 44$.

(2) 给出一组 $P_1,P_2,\ldots,P_{2023}$, 使得 $\lambda=44$.

第四章　中国西部数学邀请赛 (CWMI)

2019 年中国西部数学邀请赛

1. 求所有的正整数 n, 使得 $3^n + n^2 + 2019$ 是一个完全平方数.

2. 如图 4.1, 在锐角三角形 ABC 中, $AB > AC$, 点 O, H 分别为其外心和垂心, 点 M 为边 BC 的中点. 设 AM 的延长线与 $\triangle BHC$ 的外接圆交于点 K, 直线 HK 与 BC 交于点 N.

证明: 若 $\angle BAM = \angle CAN$, 则 $AN \perp OH$.

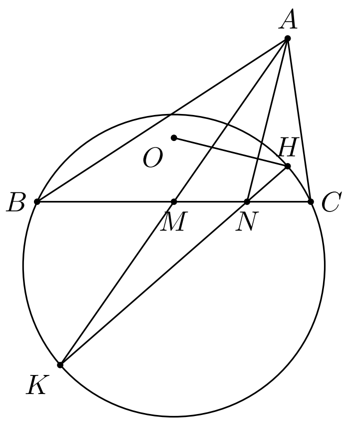

图 4.1

3. 设 $S = \{(i, j) : i, j = 1, 2, \ldots, 100\}$ 是直角坐标平面上的 100×100 个整点构成的集合. 将 S 中的每个点染为给定的四种颜色之一. 求以 S 中四个颜色互不相同的点为顶点, 且边平行于坐标轴的矩形个数的最大可能值.

4. 设 n $(n \geqslant 2)$ 是给定的整数. 求最小的实数 λ, 使得对任意实数 $x_1, x_2, \ldots, x_n \in [0, 1]$, 存在 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n \in \{0, 1\}$, 满足: 对任意 $1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n$ 都有

$$\left|\sum_{k=i}^{j}(\varepsilon_k - x_k)\right| \leqslant \lambda.$$

5. 如图 4.2, 在锐角三角形 ABC 中, $AB > AC$, 点 O, H 分别为其外心和垂心. 过点 H 作 AB 的平行线交 AC 于点 M, 过点 H 作 AC 的平行线交 AB 于点 N. 设 L 为 H 关于 MN 的对称点, 直线 OL 与 AH 交于点 K. 证明: K, M, L, N 四点共圆.

证明. 如图 4.3. 记 $\triangle AMN$ 的外接圆为 Γ.

由题意, $\angle LNM = \angle HNM = \angle AMN$, $LN = HN = AM$, 那么 $\triangle AMN \cong \triangle LNM$. 于是四边形 $ALMN$ 是一个等腰梯形或矩形, 从而也是一个圆内接四边形.

由 $BH \perp HN$, $CH \perp HM$, $\angle ABH = \angle ACH$ 可得 $\triangle BHN \sim \triangle CHM$. 那么 $BH/CH = NH/HM = AM/AN$, 从而 $AM \cdot CM = AN \cdot BN$, 于是 M, N 关于 $\odot O$ 的幂相等, 所以 $OM = ON$.

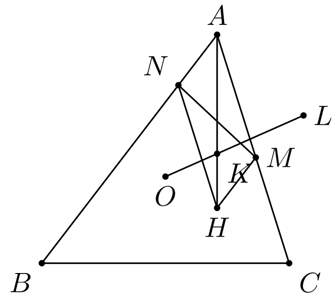

图 4.2

由于点 O 在线段 MN 的垂直平分线 ℓ 上, 且 ℓ 是四边形 $ALMN$ 的一条对称轴, 于是 $\angle KLM = \angle OAN = \angle KAM$. 所以 A, K, M, L 四点共圆, 从而 K, M, L, N 四点共圆.

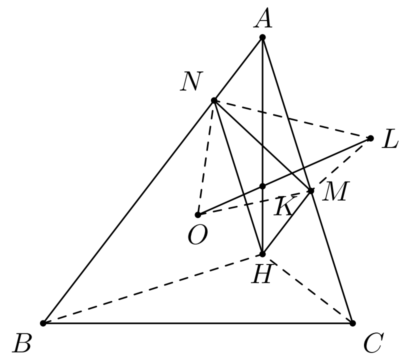

图 4.3

□

6. 设 n $(n \geqslant 2)$ 个正实数 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ 满足 $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \cdots \leqslant a_n$. 证明:

$$\sum_{1 \leqslant i<j \leqslant n}(a_i+a_j)^2\left(\frac{1}{i^2}+\frac{1}{j^2}\right) \geqslant 4(n-1) \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i^2}{i^2}.$$

7. 证明: 对任意正整数 k, 至多存在有限个集合 T, 满足下列条件:

(1) T 由有限个素数组成;

(2) $\prod\limits_{p \in T} p \mid \prod\limits_{p \in T}(p+k)$.

8. 称形如 $\{x, 2x, 3x\}$ 的集合为 "好的". 对给定的整数 n $(n \geqslant 3)$, 问: 由 n 个正整数构成的集合最多能有多少个 "好的" 子集?

2023 年中国西部数学邀请赛

1. 是否存在 6 个两两不同的整数 a,b,c,d,e,f, 使得它们恰为关于 x 的方程

$$(x+a)(x^2+bx+c)(x^3+dx^2+ex+f)=0$$

的 6 个根?

2. 某个国家有 2023 个岛和 2022 座桥, 任意一座桥连接两个不同的岛, 任意两个岛之间至多有一座桥相连, 且可以从任意一个岛通过若干座桥到达其他任何岛. 若三个岛中的某个岛与另两个岛都有桥连接, 则称这三个岛组成 "岛群". 已知任两个 "岛群" 中都有共同的岛, 那么恰有一座桥的岛最少有多少个?

3. 如图 4.4, 已知 $\triangle ABC$ 内两点 P,Q 满足 $\angle PBC=\angle QBA$ 且 $\angle PCB=\angle QCA$, 线段 BC 上一点 D 满足 $\angle PDB=\angle QDC$. 设点 A 关于直线 BP,CQ 的对称点分别为 X,Y. 求证: $DX=DY$.

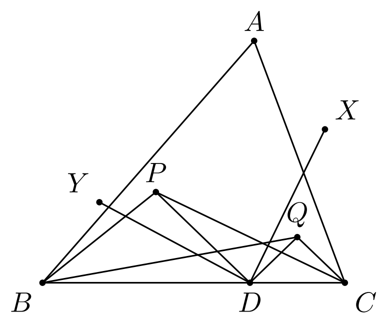

图 4.4

证明. 如图 4.5. 设点 P,Q 关于直线 BC 的对称点为 P',Q', 则 P,D,Q' 三点共线, Q,D,P' 三点共线.

由题意, $\angle ABX=2\angle ABP=2\angle CBQ=\angle QBQ'$, 于是 $\angle ABQ=\angle XBQ'$, 从而 $\triangle BAQ\cong\triangle BXQ'$, 同理 $\triangle CAP\cong\triangle CYP'$.

于是 $XP=AP=YP'$, $XQ'=AQ=YQ$, 又 $PQ'=P'Q$, 可得 $\triangle XPQ'\cong\triangle YP'Q$. 注意到点 D 为 $\triangle XPQ'$ 到 $\triangle YP'Q$ 的旋转变换中心, 所以 $DX=DY$.

□

注. *由 Poncelet 小定理, 以 P,Q 为焦点且过 D 的椭圆与 $\triangle ABC$ 的三边相切.*

4. 设 p 为素数, 整数 a,b,c 均与 p 互素. 求证: 存在绝对值均小于 $\sqrt{p}$ 的整数 x_1,x_2,x_3,x_4, 满足

$$ax_1x_2+bx_3x_4\equiv c \pmod p.$$

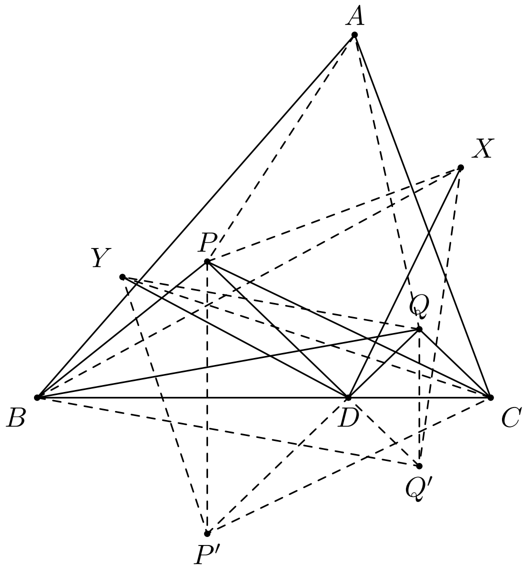

图 4.5

5. 设非负实数 $a_1, a_2, \ldots, a_{100}$ 满足对任意 $2 \leqslant i \leqslant 99$, 有 $\max\{a_{i-1}+a_i, a_i+a_{i+1}\} \geqslant i$. 求 $a_1+a_2+\cdots+a_{100}$ 的最小值.

6. 如图 4.6, 设圆内接四边形 $ABCD$ 的对角线 AC 与 BD 的交点为 E, $\triangle ABE$ 的外心为 K, 点 B 关于直线 CD 的对称点为 X, 点 Y 满足四边形 $DKEY$ 是平行四边形. 求证: 点 D, E, X, Y 共圆.

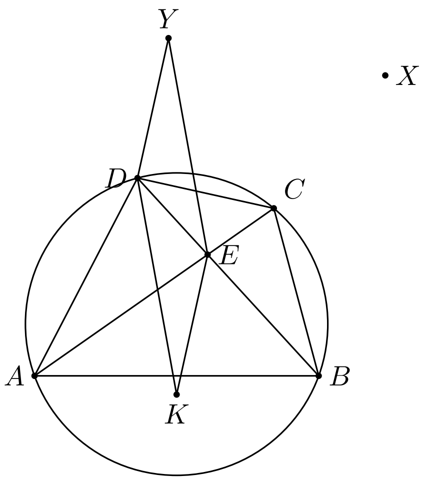

图 4.6

证明. 如图 4.7. 由 $DY = EK = BK$, $DX = BD$ 且

$$\begin{aligned}\angle YDX &= \angle YDE - \angle XDE = \angle KED - 2\angle BDC \\ &= \pi - \angle KEB - 2\angle BAE = \pi - \angle KEB - \angle EKB \\ &= \angle KBE,\end{aligned}$$

可得 $\triangle DXY \cong \triangle BDK$. 于是 $\angle DXY = \angle BEK = \angle DEY$, 所以 D, E, X, Y 四点共圆.

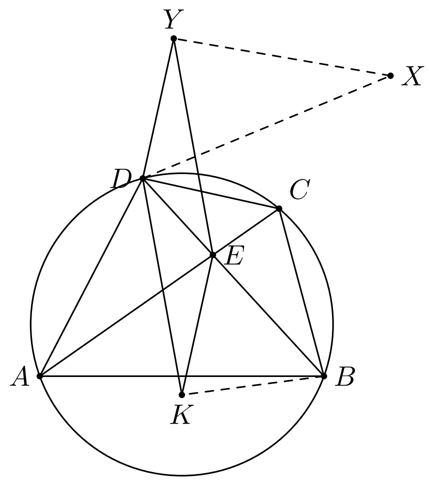

图 4.7

□

7. 对于正整数 x, y, 用 $r_x(y)$ 表示满足 $r \equiv y \pmod{x}$ 的最小正整数 r. 对任意正整数 a, b, n, 求证:

$$\sum_{i=1}^{n} r_b(ai) \leqslant \frac{n(a+b)}{2}.$$

8. 一个 100×100 方格表的左上角小方格中有一只老鼠, 右下角小方格中有一块奶酪. 老鼠希望移动到右下角小方格中吃奶酪, 每次可以从一个小方格移动到相邻的小方格 (两个小方格相邻指它们有公共边). 现在在一些小方格的边上放置隔板, 老鼠在移动时不能越过隔板. 称一种放置隔板的方式是“仁慈的”, 如果放置隔板后老鼠仍能吃到奶酪. 求最小的正整数 n, 使得对任意一种 “仁慈的” 放置 2023 个隔板的方式, 老鼠都能通过不超过 n 次移动吃到奶酪.